DEFINIÇÕES DAS INTEGRAIS DE RIEMANN

Marcelo Braga Monteiro [1]
Genivaldo dos Passos Correa [2]

RESUMO

Este estudo aborda as Integrais de Riemann, pois é perceptível, na disciplina de cálculo, uma grande dificuldade pela maioria dos discente do curso de matemática e de outros cursos, em compreendê-la. Neste sentido, este trabalho tem por objetivo geral, demonstrar as Integrais de Riemann de um modo simples de compreensão. Já os específicos são: Identificar formas simples de explicar os cálculos da Integral de Riemann; criar, a partir de demonstrações, um material de cálculo com linguagem acessível de compreensão. A metodologia utilizada, até o presente momento, é a pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa, com objetivos descritivos. Por se tratar de uma pesquisa em andamento, como resultados parciais, observou-se que é possível desmistificar o medo da não compreensão desse tipo de cálculo, isso porque, já há uma certa rejeição das pessoas por cálculos, o que cria uma barreira para sua compreensão. Este trabalho tem como embasamento, autores como GUIDORIZZI, 2001 e STEWART, 2006.

Palavras-Chave: Integrais; definições; demonstrações, soma, Riemann

1- Introdução

No ramo da matemática conhecida como análise real, a integral de Riemann foi a primeira definição rigorosa de uma integral em um intervalo pré-definido (Stewart p 371). Embora seja inadequada em muitos casos a integral de Riemann é a definição mais simples das integrais e utilizada para a definição de área de figuras não regulares.

Esse trabalho apresenta a partir de uma linguagem simples como demonstrar e aplicar as integrais de Riemann com objetivo de ajudar os discentes de cálculo para a melhor compreensão do conteúdo. Ao usar livros consagrados na área como o Guidorizzi que talvez para muitos seja complexo o trabalho em questão tenta simplificar essa questão

2- Metodologia:

Por se tratar de uma pesquisa em andamento, até o momento utilizou-se a metodologia da pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa, com objetivos descritivos. Posteriormente, se pretende utilizar a pesquisa de campo, com aplicação dos resultados obtidos.

3- Integral de Riemann:

3.1 A soma de Riemann:

Durante o século XIX o matemático alemão Bernhard Riemann desenvolveu um conceito muito importante para o estudo das integrais, esse conceito ficou conhecido como soma de Riemann,

[1] Graduação em curso em licenciatura em matemática pela universidade federal do Pará. UFPA. e-mail: marcelo.monteiro@abaetetuba.ufpa.br
[2] Orientador- Doutor em matemática UFPA: e-mail: genivaldo@ufpa.br

sendo este uma abordagem fundamental no cálculo das integrais, na qual permite obter uma aproximação para as áreas de sob uma curva em uma função.

Para entendermos o conceito da soma de Riemann é necessário ter uma função continua em um intervalo fechado [a,b], na qual será dividida em vários subintervalos menores com objetivo de calcular a área da curva de uma função. A soma de Riemann pode ser expressa como a soma das áreas de cada subintervalo na qual pode ser representado pela seguinte formula:

$$\mathbf{A = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i}$$

Onde n representa o número de subintervalos $f(c_i)$ é o valor da função no ponto médio c_i do i-ésimo subintervalo, e Δx_i é a largura do i-ésimo subintervalo. Quando o número de subintervalos aumenta e fazemos a largura se aproxime a zero, a soma de Riemann se torna o cada vez mais próximo do valor exato da área da função delimitado no intervalo [a,b], sendo representado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\,\Delta x_i$$

A soma de Riemann é um mecanismo fundamental na formulação da teoria do cálculo das integrais, onde fornece base para o cálculo de áreas sob curvas essenciais para a análise de muitos fenômenos matemáticos e físicos. (Guidorizzi p. 300- 302)

Ex: calcular a soma de Riemann para a função **$f(x)=x^2$** aplicada no intervalo [0,2].

Resolução:

Como o intervalo foi delimitado de [0,2] vamos utilizar 4 retângulos para esse exemplo, após isso dividir o intervalo [0,2] em quatro partes, quanto subdividido o intervalo for mais precisa será a aproximação.

$$A = \sum_{i=0,5}^{n=4} f(c_i).\Delta x_i$$

$$A = \Delta x_i.\ f(0{,}25)+ \Delta x_i\ f(0{,}75)\ \Delta x_i\ f(1{,}25)\ \Delta x_i\ (1{,}75)$$

$$A= \Delta x_i.\ (f(0{,}25)+ f(0{,}75)+ f(1{,}25)+f(1{,}75)$$

$$A=0{,}5.\ (0{,}0625+ 0{,}5625+ 1{,}5625+ 3{,}0625)$$

$$A=0{,}5.\ 5{,}25$$

$$A= 3.75 \text{ u.a}$$

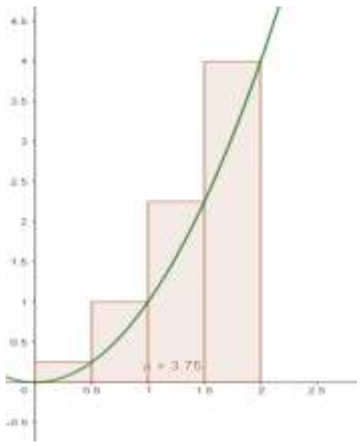

Foto 1: exemplar da soma de Riemann

Fonte: acervo pessoal do autor

3.2 integrais de Riemann:

As integrais de Riemann uma parte fundamental quando se trata do estudo do cálculo de integrais, a ideia de Riemann é compreender a área de uma curva com um número não determinado de retângulos, com intervalos cada vez menores. De uma maneira simples para fazer a ilustração do processo, considere uma função f(x) definida em um intervalo fechado [a,b], a integral de f(x) pertencente ao intervalo [a,b], pode ser definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Onde dx representa o diferencial de x, com intuito de indicar a variação infinita de x para calcular áreas sob curvatura.

A integral de Riemann definida é calculada através de um limite a partir da soma de Riemann

No qual e uma soma ponderada das alturas da função em pontos escolhidos a partir de subintervalos de [a,b], multiplicadas pela largura dos subintervalos, a cada vez que o número de subintervalos aumentam a tendencia é que a largura dos retângulos tende a 0. Convergindo assim para o valor da integral definida. No qual pode ser representada por:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\ \Delta x_i}$$

Onde n representa o número de subintervalos, Δx_i, é a largura do i-ésimo subintervalo e c_i é um ponto escolhido em cada subintervalo. (Stewart p.380 a 382)

Ex; calcular a integral de $f(x)=x^2$ delimitada no intervalo [0,3]

Resolução:

Com a fórmula da integral definida anteriormente temos que:

$$\boldsymbol{\int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3}$$

$$\boldsymbol{\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}}$$

$$\boldsymbol{\frac{27}{3} - 0}$$

9-0= 9 u.a

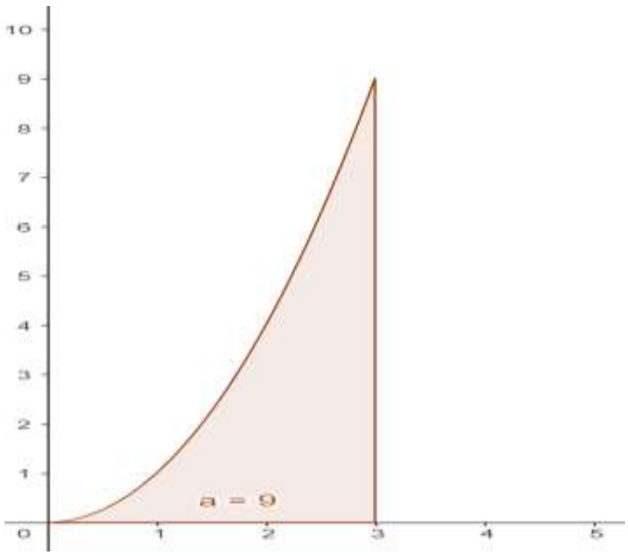

Foto 2: exemplar da integral de Riemann

Fonte: acervo pessoal do autor

3-Considerações parciais:

Durante a primeira etapa dessa pesquisa foi possível perceber que há uma mistificação sobre cálculo, isso porque não foi trabalhado de forma mais simples. Outro ponto importante desse estudo foi que é possível desmistificar o cálculo das Integrais de Riemann, utilizando uma linguagem mais simples para sua compreensão. Vale ressaltar que esta pesquisa encontra-se em andamento, portanto, alguns pontos ainda precisam ser ajustados para que se chegue a conclusão completa.

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo.** 5ª.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. (vol.1)

STEWART, James. **Cálculo vol.1** 5ª.ed. São Paulo 2006