8ª SEMAT
Semana da Matemática de Abaetetuba
MATEMÁTICA E IDENTIDADE: Cultura, Diversidade e Inclusão
02 a 04 Dezembro 2020
ABAETETUBA

Equações Diferenciais Ordinárias: um estudo sobre problemas de autovalores

Ângelo Felipe M. Silva [1]
Suellen Cristina Q. Arruda [2]

RESUMO: As Equações Diferenciais é uma importante área de pesquisa na Matemática tanto pelo seu rigor matemático, quanto por sua multiplicidade de aplicações em diversos campos científicos, como a física, biologia e engenharia. Em todas essas áreas do conhecimento nos deparamos com fenômenos modelados a partir de equações diferenciais, tais como, o movimento de fluídos, propagação e detecção de ondas sísmicas e balanço de drogas no organismo. No presente trabalho, investigaremos a existência de solução para problemas de autovalores com valores de contorno. A ideia consiste em encontrar todos os valores para os quais a solução do problema é não-trivial, chamados de autovalores, e as autofunções associadas a esses autovalores. Tais problema relacionam conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial, além disso, está incluso em uma grande classe de problemas de valores de contorno chamada de problemas de Sturm-Liouville, a qual possui propriedades relevantes para o seu estudo.

Palavras-chave: *Equações Diferenciais, Autovalores, Autofunções.*

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, solucionou diversos problemas da época, tanto quanto fomentou o surgimento e avanço de novas áreas de pesquisas, entre elas, as Equações Diferenciais. A princípio, os estudos das equações diferenciais tiveram como foco a solução de problemas práticos físicos. No entanto, ao longo dos últimos séculos, observou-se a sua grande relevância, seja por apresentar uma matemática rigorosa, seja por sua multiplicidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Segundo Boyce e DiPrima (2015), as equações diferenciais continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica com muitas questões em aberto, e ressaltam que os modelos mais simples podem modelar um fenômeno físico importante.

Dentre as aplicações importantes envolvendo equações diferenciais, destacamos os *problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville,* que se trata de uma grande e importante classe de problemas na Matemática, cujo desenvolvimento contribuiu de forma significativa, no início do século XX, com o nascimento da Análise Funcional. Diante disso, neste trabalho abordaremos um problema incluso na referida classe conhecido como *problema de autovalores* cujo objetivo consiste em analisar uma equação diferencial definida com valores de contorno a fim de encontrar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ chamados de autovalores para o qual a solução é não-trivial. Essas soluções não-triviais são denominadas de autofunções. O trabalho está estruturado em dois tópicos: *Conceitos Preliminares*, onde será feito um breve resumo dos conteúdos necessários para o entendimento da resolução do problema; e *O problema de autovalores,* onde será apresentado a resolução do problema proposto.

[1] *Licenciando em Matemática – Universidade Federal do Pará/Campus Universitário do Baixo Tocantins – E-mail: a.felipesilva712@gmail.com*
[2] *Doutora em Matemática – Professora da Universidade Federal do Pará/Campus Universitário do Baixo Tocantins – E-mail: scqarruda@ufpa.br*

1. CONCEITOS PRELIMINARES

Para compreendermos a resolução do problema, é de suma importância o conhecimento prévio de alguns conceitos da Álgebra Linear e de Equações Diferenciais.

Seja a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \tag{1.1}$$

onde a, b e c são constantes dadas. Supondo que $y = e^{rt}$ é uma solução de (1.1), podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$a(r^2e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0 \Longrightarrow e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, dividindo o resultado acima por e^{rt}, se obtém

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{1.2}$$

Essa equação é chamada de *equação característica ou equação auxiliar*. Sua importância está no fato de que se r for raiz desta equação, pode-se concluir que $y = e^{rt}$ é uma solução para a equação diferencial (1.1).

Considerando r_1 e r_2 raízes reais da equação característica, então $y_1 = e^{r_1t}$ e $y_2 = e^{r_2t}$ serão soluções para (1.1). Assim, notamos que a equação (1.2) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais e, portanto, podemos considerar três casos para a solução geral da equação (1.1).

Caso 1: Se r_1 e r_2 são reais e distintas, então a solução geral se dá na forma

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$$

Caso 2: Se r_1 e r_2 são reais e iguais, então a solução geral será

$$y = c_1te^{r_1t} + c_2e^{r_2t}, \text{ com } r_1 = r_2 = {}^{-b}/_{2a}$$

Caso 3: Se r_1 e r_2 são complexas e conjugadas, ou seja, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2e^{\lambda t}sen(\mu t)$$

Os três casos acima são importantes para a análise dos valores de λ a fim de verificar se ele é um autovalor do problema em questão.

2. O PROBLEMA DE AUTOVALORES

Considere o problema

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \forall\, t \in [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Chamamos os valores de λ, para os quais existem soluções não-triviais do problema, de *autovalores* e as soluções não-triviais de *autofunções*. Como o problema consiste em encontrar todos os autovalores e as autofunções associadas a esses autovalores, é necessário analisar os valores de λ em três eventos.

Evento 1: Suponha $\lambda < 0$. Neste caso, seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = c_1\cosh(\mu t) + c_2\text{senh}(\mu t).$$

Para satisfazer a primeira condição de contorno $y(0) = 0$, é necessário tomar $c_1 = 0$. Da segunda condição de contorno, temos

$$y(\pi) = c_2\text{senh}(\mu\pi) = 0$$

o que implica em $c_2 = 0$. Logo, o problema (2.1) não possui soluções não-triviais e, consequentemente, não há existência de autovalores negativos.

Evento 2: Se $\lambda = 0$, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2.$$

Aplicando as condições de contorno, temos $y(0) = c_2 = 0$ e $y(\pi) = c_1\pi = 0$, o que nos dá $c_1 = 0$. Logo, para $\lambda = 0$ o problema (2.1) só admite a solução trivial, e, portanto, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Evento 3: Suponha $\lambda > 0$ e considere $\lambda = \mu^2$, onde $\mu > 0$. Assim, a solução geral de (2.1) é dada por

$$y(t) = \mathrm{c}_1\cos(\mu t) + c_2\text{sen}(\mu t).$$

Pelas condições de contorno,

$$y(0) = c_1 = 0 \quad \text{e} \quad y(\pi) = c_2\text{sen}(\mu\pi) = 0.$$

Interessa-se, em encontrar soluções não-triviais, para isso $c_2 \neq 0$. Dessa forma,

$$\text{sen}(\mu\pi) = \text{sen}\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda = k^2,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os autovalores do problema (2.1) são os quadrados de inteiros, isto é,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \dots, \lambda_n = n^2, \dots, \tag{2.2}$$

E as autofunções associadas aos autovalores de (2.2) são

$$y_1(t) = \text{sen}(t), y_2(t) = \text{sen}(2t), \dots, y_n(t) = \text{sen}(nt), \dots,$$

Como a constante c_2 não está determinada, segue que, os múltiplos dessas funções também são autofunções para o problema (2.1).

3. Considerações Finais

O trabalho proporcionou o estudo introdutório das Equações Diferenciais e seus métodos de resolução, bem como conhecer a história de alguns célebres matemáticos percursores da teoria. Além disso, oportunizou compreender a importância da modelagem matemática para descrever, a partir das equações diferenciais, diversos fenômenos da natureza, o que impulsionou no aprofundamento teórico de assuntos da Álgebra Linear e do Cálculo Diferencial e Integral.

Vimos que a solução do problema proposto é uma sequência infinita crescente de senos e que todos os seus autovalores são valores reais e distintos, características herdadas dos problemas *de Sturm-Liouville.* E ainda, verificamos que a existência de soluções não triviais ocorre somente para autovalores positivos.

Cabe informar que, o desenvolvimento desse trabalho é resultado do projeto de Iniciação Científica aprovado intitulado "Introdução ao Estudo de EDP na Região Tocantina", sob orientação da Profª Draª Suellen Cristina Queiroz Arruda, possibilitando aprofundamento teórico em equações diferenciais de modo a realizar pesquisas nas áreas da Matemática Pura e Aplicada, além de preparar para um possível ingresso em cursos de pós-graduação.

Referências

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais, volume 1**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Impa, 1997.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: edusp, 2018.

MEDEIROS, Elisa Ferreira. **Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível**. 2016. 56 f. Trabalho de conclusão de Curso (graduação) – Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, FURG, Rio Grande, 2016.

SILVA, Carlos Antonio Pereira da. **O problema de Sturm-Liouville e aplicações**. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.