EDIÇÃO ESPECIAL

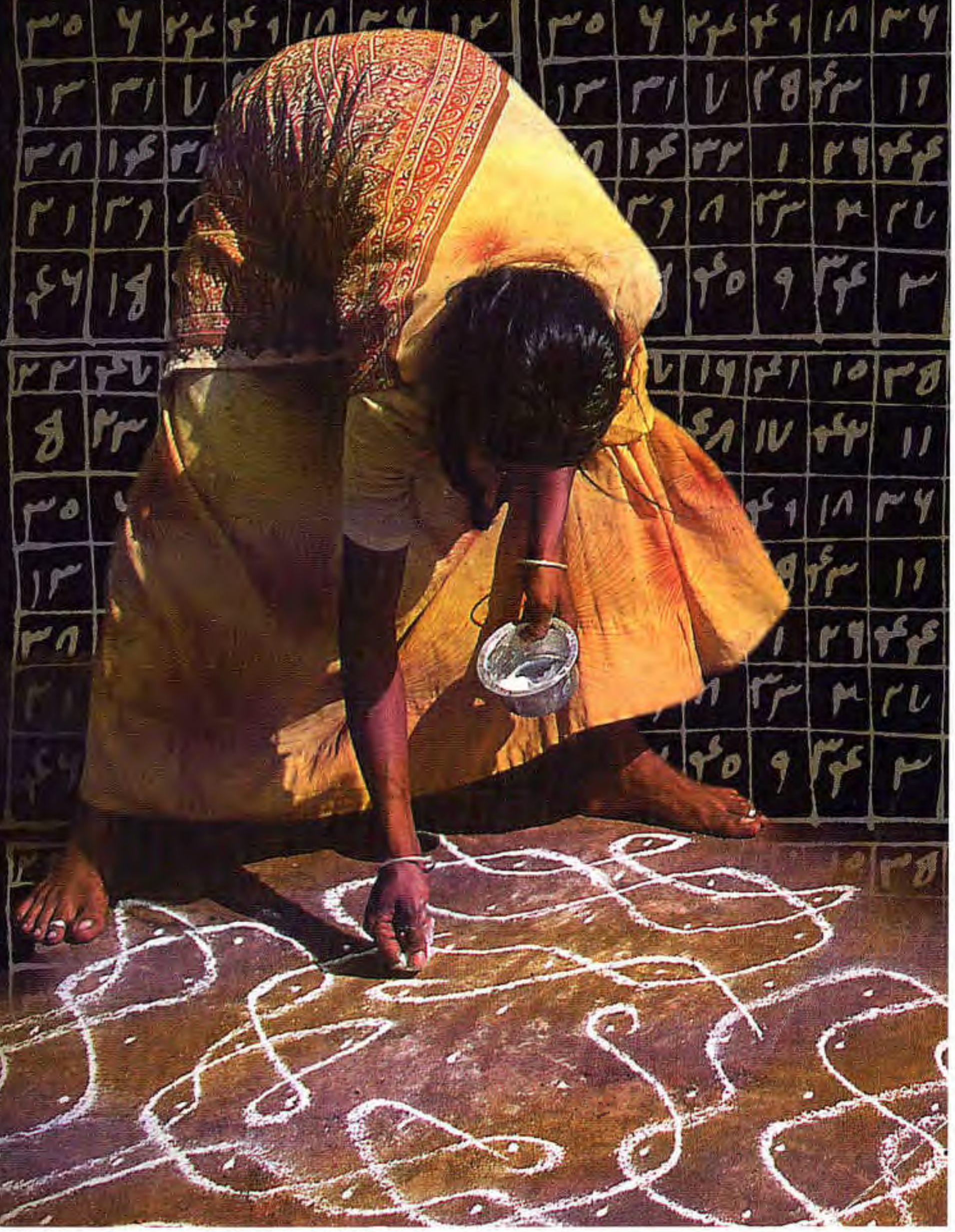
SCIENTIFIC AMERICAN Brasil

WWW.SCIAM.COM.BR

Nº 11 R$ 11,90 PORTUGAL € 4,50

ETNOMATEMÁTICA

O modo ocidental de contar não é o único. Povos de diferentes regiões e culturas desenvolveram métodos próprios de solucionar problemas que são usados até hoje



África
Berço da matemática há 20 mil anos

Peru
O enigma dos quipos, as cordas com nós

Japão
A geometria a serviço dos deuses

Oriente Médio
Quadrados mágicos na terra do Islã

Índia
A tradição feminina nas figuras do kolam

Brasil
A sabedoria dos sem-terra, índios e negros

ISSN 1679-5229

SCIENTIFIC AMERICAN Brasil
www.sciam.com.br

DIRETOR GERAL: Alfredo Nastari
DIRETORA ADJUNTA: Ana Luisa Astiz

EDIÇÃO ESPECIAL ETNOMATEMÁTICA

REDAÇÃO
(redacaosciam@duettoeditorial.com.br)
EDITORA: Laura Knapp
EDITORES-ASSISTENTES: Rafael F. Garcia e Giovana Girardi
EDITOR DE ARTE: Gerson Gomes Martins
ASSISTENTE DE ARTE: Marina de Oliveira Lemos
ICONOGRAFIA: Pietra Stefania Diwan (coordenação), Sara Alencar e Silvia Nastari (assistentes)
PRODUTOR GRÁFICO: Dalton do Nascimento
TRADUÇÃO: Graziella Beting, Julio Monteiro de Oliveira, Marcelo Vaz e Marly N. Peres
REVISÃO: Edna Adorno (coordenação), Luiz Roberto Malta, Otacilio Palareti, Saulo Krieger e Stephania C. Gambirasio

SCIENTIFIC AMERICAN INTERNATIONAL
EDITOR IN CHIEF: John Rennie
EXECUTIVE EDITOR: Mariette DiChristina
MANAGING EDITOR: Michelle Press
ASSISTANT MANAGING EDITOR: Ricki L. Rusting
NEWS EDITOR: Philip M. Yam
SPECIAL PROJECTS EDITOR: Gary Stix
EDITORS: Mark Alpert, Steven Ashley, Graham P. Collins, Carol Ezzell, Steve Mirsky, George Musser
ART DIRECTOR: Edward Bell
ASSOCIATE PUBLISHER, PRODUCTION: William Sherman
PRODUCTION EDITOR: Richard Hunt
PRESIDENT AND CHIEF EXECUTIVE OFFICER: Gretchen G. Teichgraeber
VICE PRESIDENT AND MANAGING DIRECTOR INTERNATIONAL: Dean Sanderson
CHAIRMAN: John Sargent

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL é uma publicação da Ediouro, Segmento-Duetto Editorial Ltda., empreendimento conjunto das editoras Segmento e Ediouro, sob licença de Scientific American, Inc.
Rua Cunha Gago, 412 – conj. 33 – Pinheiros – São Paulo – SP
CEP: 05421-001 – Tel./Fax: (11) 3039-5633

Duetto EDITORIAL

Jorge Carneiro, Edimilson Cardial, Luiz Fernando Pedroso e Alfredo Nastari

PUBLICIDADE
(publicidadesciam@duettoeditorial.com.br)
DIRETOR DE PUBLICIDADE: Renato Resston
Ana Maria Rambo (assistente comercial)
EXECUTIVOS: Kátia Zaratin Santacroce, Nilda Smolari Sperandeo, Rogério Oliveira
REPRESENTANTES DE PUBLICIDADE
BRASÍLIA: Singulare Publicidade – Magda Dias (61) 344-5181 Cel. (61) 9982-7409 (brasilia@editorasegmento.com.br)
CEARÁ, MARANHÃO E PIAUÍ: Holanda Comunicação – Agimiro Holanda (85) 3224-2267/3224-2367 (agholanda@agholanda.com.br)
PARANÁ E SANTA CATARINA: Direção de Produtos – Euclides de Oliveira (41) 339-4848 (euclides@dpcpr.com.br)
Rio Grande do Sul: L.R. Gianoni Com. Repres, LTDA – Roberto Rodrigues (51) 3388-7712 (gianoni@gianoni.com.br)

INTERNATIONAL SALES
MULTIMEDIA, INC. Tel.: +1-407-903.5000 (info@multimediausa.com)

PLANEJAMENTO E CONTROLE
DIRETOR: Marcio Ivo Motter

MARKETING
DIRETOR: André Felipe D'Amato
VENDAS AVULSAS: Carla Lemes (coordenação)
ASSINATURAS: Fátima de Oliveira (coordenação) e Daniela de Oliveira
PLANEJAMENTO E INTERNET: Mariana Monné (coordenação)
PROPAGANDA: Carolina Conde
PROMOÇÃO: Silvia Campos

CENTRAL DE ATENDIMENTO AO ASSINANTE BRASIL: (11) 3039-5601
(atendimento@duettoeditorial.com.br)
NOVAS ASSINATURAS: (queroassinar@duettoeditorial.com.br)
NÚMEROS AVULSOS E EDIÇÕES ESPECIAIS:
(edicoesavulsas@duettoeditorial.com.br)

PORTUGAL: CREATIVE SALES – Tel.: (21) 393-6555 Fax.: (21) 393-6559
(assinaturas@creativesales.pt)

OUVIDORIA: (ouvidoria@duettoeditorial.com.br)

Edição Especial Scientific American Brasil nº 11, ISSN 1679-5229. Distribuição com exclusividade para todo o **BRASIL**: Dinap S.A. Estrada Velha de Osasco, 132. Números avulsos podem ser solicitados ao seu jornaleiro ou na central de atendimento ao leitor (11) 3039-5601 ao preço da última edição acrescido dos custos de postagem. Distribuição com exclusividade em **PORTUGAL**: Midesa.

IMPRESSÃO: Ediouro

FIPP ANER www.aner.org.br

DIRETOR RESPONSÁVEL: Alfredo Nastari

Por que etnomatemática?

ALGUNS DIAS ANTES DO fechamento desta edição estava conversando com o professor Vanísio Luiz da Silva, um dos nossos colaboradores no especial, e ele disse algumas coisas que sintetizam por que é tão importante falar em etnomatemática.

Ele explicou como às vezes é difícil lidar com a resistência que alguns matemáticos têm em aceitar esse ramo das pesquisas. Essa rixa se reflete em entraves para a implementação de propostas educacionais que levem em conta o lado histórico, cultural e antropológico dessa matemática que vem do dia-a-dia, da dinâmica familiar, dos ancestrais de cada um. "É uma visão de mundo anterior, que não é nem mais certa nem mais errada que a matemática tradicional, mas que deve ser levada em conta na hora de ensinar", defende Silva, co-autor do artigo sobre a "matemática mítico-religiosa-corporal do negro brasileiro".

Para ilustrar seu ponto de vista, ele contou a dificuldade enfrentada por professores "brancos" que foram ensinar contas para uma tribo de índios que tem uma forma peculiar de encarar as unidades. "Se eles têm várias coisas iguais, por exemplo, várias bananas, e uma laranja, eles contam como se tivessem só duas unidades porque as bananas, por serem iguais, representam uma coisa só. Não adianta tentar ensinar que ali existem dez coisas sem levar em conta essa cultura anterior."

Esse modo próprio de compreender o mundo com uma visão matemática é especialmente rico no Brasil. Tal característica pode ser encontrada não só nos índios, como também nos negros, nos sem-terra, até mesmo na conta do menino que vende bala no semáforo, como mostra a professora Maria do Carmo Domite em seu artigo. Por isso, nos preocupamos em enriquecer esta revista com textos que retratem a etnomatemática brasileira e discutam a sua abordagem em sala de aula. Pioneiro dos estudos nessa área, o professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio, que escreve o artigo de introdução do especial e prestou uma assessoria técnica para a confecção de todo o material, resume essa idéia: "a matemática é a marca da civilização humana em sua pluralidade".

Ao longo das páginas da revista, mostramos que povos de todas as partes do mundo desenvolveram um método próprio de contar, de medir, de marcar o tempo, de entender o Universo. Alguns são de uma genialidade que impressiona até hoje pesquisadores das mais diversas áreas. É o caso, por exemplo, dos incas. Eles criaram um complexo sistema de nós em cordas, os quipos, que não só registravam a contabilidade das transações comerciais e as datas comemorativas como talvez tenham sido uma forma de escrever a língua quíchua. Mais impactante ainda é descobrir que há 20 mil anos algumas tribos africanas desenvolveram um pensar matemático e registraram seus "números" com riscos em ossos *(ver imagem acima)*. Aproveite essa viagem e tenha uma boa leitura!

Giovana Girardi
redacaosciam@duettoeditorial.com.br

Edição Especial

sumário

6 Volta ao mundo em 80 matemáticas

UBIRATAN D'AMBROSIO

Pesquisador pioneiro de etnomatemática explica por que ela é tão importante e deve ser considerada na educação básica

10 Aritmética maia

ANDRÉ CAUTY

Civilização manipulava calendários e usava algoritmos para calcular datas e durações

16

16 Os dois zeros

ANDRÉ CAUTY E JEAN-MICHEL HOPPAN

Os maias foram também os únicos a distinguir o zero cardinal (indicador de quantidades) do ordinal (marcador de posição)

20 O enigma dos quipos

LOÏC MANGIN

Os incas registravam valores e a contabilidade das cidades em confecções minuciosas de cordas e nós

24 Astronomia chinesa

JEAN-CLAUDE MARTZLOFF

País reformou suas teorias para unificar o conhecimento matemático com as observações do Universo

30 Geometria a serviço dos deuses no Japão

ANNICK HORIUCHI

Tabuletas com complexos problemas geométricos desafiavam os matemáticos antigos

36 Quadrados mágicos

JACQUES SESIANO

Árabes deram status de nobreza a um curioso e complicado passatempo

40 Poemas matemáticos

AHMED DJEBBAR

Conhecimento divulgado em versos facilitava a memorização

42 África, berço da matemática

DIRK HUYLEBROUCK

Osso petrificado sugere que há mais de 20 mil anos a humanidade já pensava numericamente

24

48 Figuras do kolam

MARCIA ASCHER

Tradição gráfica de mulheres da Índia desperta o interesse de especialistas em informática

Etnomatemática

54 Uma cultura indígena impregnada de matemática
JIM BARTA E TOD SHOCKEY
Nos EUA, a ciência está presente nas tradições e na relação com o corpo dos utes do norte

60 Músicas e ritmos na África central
MARC CHEMILLIER
Poetas tocam uma harpa com seqüências que só os matemáticos conseguem compreender

66 Fractais africanos
RON EGLASH
Arquitetura e urbanismo de antigas aldeias e cidades baseiam-se nesta complexa geometria de curvas

68 Sona: gráficos na areia angolana
PAULOS GERDES
Desenhos feitos por contadores de histórias na África central criam enigmas de análise combinatória

72 A arte dos adivinhos em Madagascar
M. CHEMILLIER, D. JACQUET, V. RANDRIANARY E M. ZABALIA
Para prever o destino, os malgaxes manipulam quadros de grãos que obedecem a regras matemáticas refinadas

78 Mosaicos e origami
IAN STEWART
A antiga arte oriental de dobrar papel mostra como se comprime um cilindro

80 Quando a etnomatemática entra em ação
MARIA DO CARMO S. DOMITE
Como os conhecimentos de cada pessoa podem ser absorvidos e aplicados na escola

86 A matemática da cubação da terra
GELSA KNIJNIK
Trabalhadores rurais do sul do país desenvolvem técnicas alternativas de medir o terreno

90 Racionalidade dos índios brasileiros
EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA
Tribos da Amazônia têm lógica própria, mas entendem questões complexas como a lei da refração

94 Matemática do negro no Brasil
WANDERLEYA NARA GONÇALVES COSTA E VANISIO LUIZ DA SILVA
Povos escravizados adaptaram seus conhecimentos míticos, religiosos e culturais e criaram um novo saber no país

68

94

Volta ao mundo em 80 matemáticas

Por Ubiratan D'Ambrosio

Incas, egípcios, maias, celtas, inuítes, papuas, pigmeus, indianos, chineses, japoneses. Todos esses povos inventaram sua própria maneira de contar e medir

A matemática é quase tão antiga quanto a espécie humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram de desenvolver métodos para resolver problemas cotidianos, como localizar-se no tempo e no espaço, e para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir – elementos fundamentais que a tradição cultural ocidental nomeia matemática.

Mas como esses formidáveis meios de investigação se desenvolveram? Os primeiros elementos de resposta delineiam um paralelo entre sua emergência e a da linguagem, das ferramentas, da arte, da música e até do humor.

Desde tempos pré-históricos *(ver artigo "África, berço das matemáticas", pág. 42)*, os humanos acumulam conhecimentos para responder a suas necessidades e seus desejos. Essas respostas dependiam, em grande medida, das regiões e das culturas. Assim, os povos das florestas elaboraram meios de medir terrenos diferentes daqueles dos povos das pradarias, e portanto desenvolveram *geo-metrias* (medidas da terra) diferentes. Aqueles que viviam nas proximidades da linha do equador percebiam dias e noites de mesma duração durante todo o ano, enquanto os que viviam além dos trópicos eram testemunhas do efeito das estações sobre a duração dos dias e das noites. Além disso, os calendários e, portanto, os meios de organização do trabalho, da urbanização e de numerosas outras práticas, se distinguiram conforme as regiões.

No final, diferenciaram-se tanto as estratégias de organização e de quantificação como os sistemas de numeração. Por essa razão, o sistema de contagem dos índios mundurucus, no coração do Brasil, nos mostra que não é necessário saber contar além de cinco para viver em harmonia com o ambiente. Matemáticas como essa, que surgiram em contextos naturais e específicos, são o objeto de estudo dos etnomatemáticos.

No final do século XV e durante todo o século XVI, as nações européias – sobretudo Espanha e Portugal, seguidos de Holanda, Inglaterra e França – estabeleceram colônias em quase todo o planeta. Com o impulso do regime colonial, os meios locais de produção e comércio foram alinhados ao modelo europeu. Simultaneamente, as especificidades intelectuais dos povos conquistados foram, na maior parte dos casos, ignoradas e, às vezes, proibidas.

A Subordinação Histórica

Dessa maneira desapareceram, ou quase desapareceram, os modos tradicionais de medida, organização e quantificação dos conjuntos dos objetos, do mesmo modo que as línguas, as religiões, a medicina e tantas outras expressões culturais. Na América do Sul, as técnicas de numeração dos incas *(ver artigo na pág. 20)* e a aritmética maia *(ver textos na pág. 16)* não sobreviveram à conquista espanhola. Numerosas outras tradições matemáticas – como a dos sonas, na África subsaariana *(ver texto na pág. 68)* – também sumiram no século XX ou estão a caminho de desaparecer.

O fim da era colonial foi marcado pelo renascimento de culturas ignoradas por séculos, e nos últimos anos temos resgatado uma explosão de novas formas de arte, de práticas medicinais, de religiões e de costumes. Mesmo línguas esquecidas (às vezes proibidas), são hoje novamente faladas. Para outras, infelizmente é tarde demais.

Essa renascença teve seus pioneiros. No primeiro quarto do século XX, o historiador Oswald Spengler apresentou sua visão da história: "Não há uma escultura, uma pintura, uma matemática, uma física, mas muitas, e cada uma é essencialmente diferente das outras, é limitada no tempo e autônoma, da mesma maneira que cada espécie de planta tem sua flor ou fruta particular, seu desabrochamento e declínio".

Diversas décadas mais tarde, uma referência mais direta a outros enfoques da matemática foi revelado pelo algebrista Yasuo Akizuki: "As filosofias e as religiões orientais são de natureza diferente das ocidentais. Posso então imaginar que existam diferentes modos de pensar, mesmo no campo da matemática. Não deveríamos nos limitar à aplicação direta dos métodos atualmente considerados na Europa e na América como os melhores, mas estudar de perto o ensino da matemática na Ásia. Tal estudo poderia se mostrar interessante e frutífero para o Ocidente e para o Oriente".

Intercâmbio Cultural Mundial

As trocas entre Europa, Ásia e África do norte foram intensas desde a Antigüidade, mas foi realmente com as grandes navegações do século XV que o horizonte cultural se expandiu a todo o mundo. As representações dos visitantes estrangeiros foram incorporadas ao imaginário coletivo dos indígenas, ao mesmo tempo que as narrativas dos viajantes inflamavam o imaginário europeu. As novas terras deixavam entrever novas riquezas. Os europeus enfraquecem o poder de negociação e a resistência das populações locais por alianças comerciais. Simultaneamente, missões religiosas e civilizadoras consolidaram a conquista. O roteiro foi o mesmo em todo lugar.

Assim, antes que o Japão se fechasse por diversos séculos, portugueses e holandeses rivalizaram por acordos comerciais no país. A vantagem foi dos primeiros enquanto o catolicismo foi tolerado e dos segundos após essa religião ter sido desfavorecida. Ao mesmo tempo, indiferentes às disputas comerciais dos europeus, matemáticos japoneses discutiam entre si com suas tábuas votivas, mantidas nos templos *(ver "A geometria a serviço dos deuses no Japão", pág. 30)*.

O período colonial propagou a civilização ocidental por todo o planeta. Instituições sociais, políticas e econômicas de origem européia se tornaram universais. Sociedades adotaram objetivos de progresso e de desenvolvimento, quantificados de acordo com os padrões propostos pelas potências coloniais.

O inegável centralismo cultural dos ocidentais é ilustrado pela história, que sempre destacou um único lado do encontro de cristãos e muçulmanos após as cruzadas: os europeus incorporaram os componentes interessantes da cultura islâmica, nada mais. Eles esqueceram os quadrados mágicos *(ver artigo na pág. 36)* e os poemas matemáticos *(pág. 40)* que os árabes redigiam "para descansar".

Não havia muito espaço para quem não partilhasse a cultura, o comportamento e, em numerosos casos, os mesmos valores dos europeus. Essa distinção é particularmente clara na matemática. Reencontrar o conhecimento das civilizações desaparecidas ou de povos marginalizados no grande tabuleiro da globalização é aprofundar a compreensão da matemática em seu maior sentido.

Ela não nasceu de um estado primitivo que teria evoluído uniformemente em direção à matemática ocidental. Segundo essa opinião "européia", um sistema que se desenvolve em uma cultura à parte da corrente principal é, na melhor das hipóteses, visto como algo intrigante ou como um ramo folclórico.

Muitas histórias fundadas sobre descobertas arqueológicas e antropológicas mostram que diversas atividades requerem o desenvolvimento da matemática: arquitetura *(ver "Fractais urbanos africanos", pág. 66)*, tecelagem, agricultura, decoração, atividades religiosas *(ver "A arte dos adivinhos de Madagascar", pág. 72)*, música *(ver "Música e Ritmos", pág. 60)*, o estabelecimento de calendários etc.

OS PARIKOS são os adornos mais característicos dos bororós, índios que vivem no Mato Grosso. Assim como ocorre com os quipos incas, essas peças representam uma forma de linguagem visual e registram dados qualitativos e quantitativos

Em conseqüência, encontramos vestígios de atividades matemáticas em todos os cantos do mundo. Por que não os explorar, por exemplo introduzindo-os na prática escolar?

Cultura Matemática

Para alguns críticos isso seria inútil com base na alegação de que tais atividades se restringem ao campo lúdico. Sem dúvida os estudantes em busca de um emprego serão avaliados por seu conhecimento da matemática clássica. No entanto, a educação é mais que uma transmissão de instrumentos utilitários direcionados para o sucesso profissional. Ela deve valorizar a diversidade cultural e desenvolver a criatividade.

O ensino da matemática pode ter uma importante contribuição na reafirmação e, em numerosos casos, na restauração da dignidade cultural das crianças. O essencial do conteúdo dos programas atuais repousa sobre uma tradição estrangeira aos alunos. De outro lado, eles vivem em uma civilização dominada pela matemática e por meios de comunicação sem precedentes, mas as escolas lhes apresentam uma visão de mundo baseada em dados.

Como a etnomatemática pode ajudar na pedagogia mais ampla no século XXI? Há uma tendência a uma visão simplista dessa área. Façamos uma reflexão maior sobre a natureza do saber.

O conhecimento é criado e organizado intelectualmente pelo indivíduo em resposta a um ambiente natural, cultural e social; depois de ter sido difundido pela comunicação, ele é organizado socialmente, tornando-se assim parte integrante de uma comunidade (uma cultura), essencialmente por reconhecer e explicar fatos e fenômenos. Observadores, cronistas, teóricos, sábios, universitários e "guardiões do poder" se apropriam desses conhecimentos, classificam-nos e dão-lhes uma etiqueta, antes de transmiti-los e difundi-los. Assim nascem as formas estruturadas de conhecimento: a língua, a religião, a culinária, a medicina, as vestimentas, os valores, a ciência, a matemática, todas interdependentes e em resposta à percepção da realidade desse ambiente. Esse conhecimento, "congelado" em estruturas coerentes, é transmitido e difundido pelos agentes, em particular os professores.

Ao reconhecer "mais de uma matemática", aceitamos que existem diversas respostas a ambientes diferentes. Do mesmo modo que há mais de uma religião, mais de um sistema de valores, pode haver mais de uma maneira de explicar e de compreender a realidade.

Matemática e Antropologia

A MATEMÁTICA OCIDENTAL sempre se desenvolveu paralelamente à do povo ou das profissões, isto é, à etnomatemática. Na Idade Média, por exemplo, os artesãos desenvolviam suas medições de modo diferente às dos monastérios e universidades. É ainda o caso hoje, e encontramos a matemática onde menos se espera, por exemplo nos curtumes e nas sacolas de entregadores de jornal.

A história prova sua parcialidade ao não reconhecer que uma nova etnomatemática era a etapa preliminar pela qual passavam as novas práticas e teorias antes de serem incorporadas pela ciência. Eis a razão por que a área deve abordar a antropologia e a história oral.

OS PRINCIPAIS destinos matemáticos apresentados neste dossiê

É nesse nível que ela deve ser inserida nos programas de ensino. Os estudantes devem ser expostos à etnomatemática praticada por seus futuros pares, para enriquecer os instrumentos, tanto de comunicação como de análise, que estão disponíveis em sua vida profissional. Nos programas de formação dos professores, a situação é comparável.

Quando ensinamos a matemática de outras culturas, por exemplo da China antiga *(ver "Astronomia chinesa", pág. 24)*, perseguimos dois objetivos: desmistificar uma forma de saber, retirando sua aura de conhecimento definirivo, absoluto e único; e ilustrar sucessos intelectuais de diferentes civilizações, culturas, profissões, gêneros.

Para os críticos que descartam a etnomatemática e dizem que ela é apenas uma variante do politicamente correto levado longe demais, dizemos que a matemática, como o ensino de um modo geral, é a arma dos sistemas políticos e ideológicos de pensamento.

E o mesmo vale para a etnomatemática. Sim, ela é uma expressão do politicamente correto. Mas é ir longe demais propor uma prática pedagógica que vise eliminar a agressividade, a arrogância, a intolerância, a discriminação, a injustiça, a hipocrisia e o ódio?

Alem do mais, em termos de educação, todas as formas de saber têm seus limites. Assim, é natural procurar novos instrumentos de comunicação e análise. Por isso as histórias das duas devem ser reunidas. Como a matemática pertence a todas as classes e contextos culturais, ela é a marca da civilização humana em sua pluralidade.

Etnomatemática no Brasil

Desde a década 1970, quando se intensificaram os estudos da área, o Brasil destacou-se, juntamente com os Estados Unidos, pelo potencial da etnomatemática na educação. Em sintonia com o pensamento de Paulo Freire, ela mostrou que, além da importante pesquisa sobre o saber e o fazer matemático de várias culturas, abordado nas dimensões etnográfica, histórica e epistemológica da etnomatemática, dá-se igual importância à dimensão pedagógica, uma vez que ela propõe uma alternativa à educação tradicional.

Nesta edição brasileira da revista *Pour la Science* foram incluídas algumas das áreas de pesquisa ativas no Brasil. São abordados aspectos da etnomatemática na questão dos assentamentos rurais que resultam do movimento pela reforma agrária (*ver artigo na pág 86*). Também são abordadas questões específicas das culturas amazônicas, com destaque ao substrato filosófico sobre o qual justificam-se as práticas matemáticas (*ver texto na pág. 90*). Outro tema é a recuperação da matemática das populações afro-brasileiras. A riquíssima cultura científica e tecnológica trazida pelos escravos africanos a partir do século XVI e modificada ao longo dos anos é, em parte, preservada nos inúmeros quilombos e nas tradições de comunidades multiculturais, sobretudo nas periferias das grandes cidades (*ver artigo na pág 94*). É importante destacar também os avanços das pesquisas nas práticas pedagógicas. A educação, nos mais diversos ambientes da nossa sociedade, mostra o grande potencial da etnomatemática (*ver texto na pág. 80*). SA

Ubiratan D'Ambrosio *é professor dos programas de Pós-Graduação em História da Ciência e em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.*

PARA CONHECER MAIS

Etnomatemática. Arte ou técnica de explicar e conhecer. Ubiratan D'Ambrosio. Editora Ática, 1990.

Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade. Ubiratan D'Ambrosio. Autêntica Editora, 2001.

Idéias matemáticas de povos culturalmente distintos. Mariana K. Leal Ferreira (org.). Global Editora, 2002.

Etnomatemática. Currículo e formação de professores. Gelsa Knijnik, Fernanda Wanderer e Cláudio José de Oliveira (orgs.). Edunisc, 2004.

Etnomatemática: papel, valor e significado. José Pedro Machado Ribeiro, Maria do Carmo Santos Domite e Rogério Ferreira (orgs.). Editora Zouk, 2004.

Aritmética maia

Povo da Mesoamérica era mestre na arte de manipular calendários e usava algoritmos para calcular datas e durações

Por André Cauty

O domínio cultural dos maias se estendeu por um território imenso na Guatemala e no sul do México até a conquista espanhola, no século XVI. Essa civilização vivia principalmente do milho e estava organizada havia séculos. A partir do início da era cristã, construiu pirâmides e inventou uma escrita, mas o que sabemos de sua matemática? Absorvidos por sua sede de riqueza, os espanhóis desprezaram os números maias e tentaram até mesmo erradicar essa ciência, que para eles não passava de sinais diabólicos. A partir de então, os números maias estariam perdidos... ou quase.

Nas últimas décadas, uma reconstrução minuciosa elucidou algumas numéricas encontradas, e mesmo as mais degradadas se juntam pouco a pouco em signos e palavras. Além do trabalho dos arqueólogos, epigrafistas e historiadores, é necessário também reconstruir os sistemas simbólicos que permitem sua leitura e tradução. Após estabelecer o catálogo dos traços que nos chegaram, detalharemos um tipo de estado da arte daquilo que sabemos da numeração escrita e especificaremos os problemas numéricos que os escribas enfrentavam – e as soluções encontradas.

Traços Escritos

Em 1519, HERNÁN CORTÉS enviou as primeiras amostras da escrita dos maias a Carlos V, mas a numeração maia não interessou os ocidentais até o século XIX. Seu estudo começaria apenas com a descoberta de inscrições em monumentos e códices, manuscritos longos com diversos metros de comprimento e de 20 cm de largura, dobrados em sanfona *(ver figura 1)*.

A maioria dos códices acabou sendo descartada por desinteresse ou destruída pela Inquisição. O bispo Diego de Landa (1524-1579) dedicou-se a tentar eliminar todos os testemunhos e signos da cultura maia. Hoje, conhecemos apenas três códices que escaparam das chamas e um quarto (o Grolier) que provavelmente é falso. Hoje, especialistas decifraram quase todas as inscrições e códices.

Para explorar essa escrita, era necessária uma pedra de roseta que permitisse as primeiras iniciativas sérias de decifração. Ironicamente, foi o próprio Landa quem forneceu essa chave. Para melhor compreender o inimigo, o bispo interrogou longamente os indígenas sobre a escrita local. Sua obra *Relación de las Cosas del Yucatán* contém os nomes e os glifos (um glifo é um sinal gráfico que ocupa o espaço de um quadrado, a unidade mínima da escrita maia) dos dias, dos meses e dos períodos de tempo, bem como informações sobre o calendário maia. Landa tentou compreender o funcionamento da escrita maia, mas seus esforços foram em vão, pois ele nunca chegou a entender que a escrita dos códices e das inscrições não eram de tipo alfabético. Esse texto foi redescoberto em 1861 pelo abade Charles de Bourbourg, que publicou uma versão bilíngüe da obra.

Monumentos e inscrições gravadas, assim como os códices, só foram redescobertos muito tempo após a conquista espanhola. Em 1746, o padre Antonio de Solís chegou a Santo Domingo de Palenque. Em busca de terras a cultivar, ele descobriu na floresta "casas de

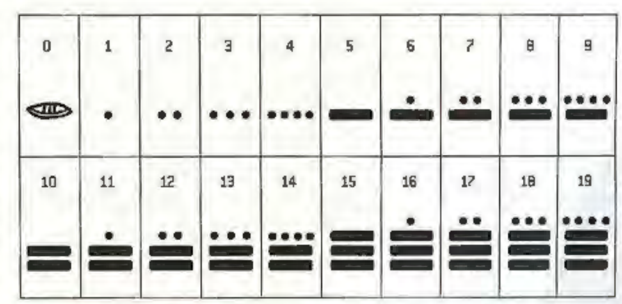
1. DUAS PÁGINAS DO códice Tro-Cortesianus, mantido em Madri. Nesse almanaque ligado à apicultura *(as abelhas estão em vermelho)*, as datas indicadas por pontos e barras são as do calendário religioso, chamado de *tzolkin*

pedra" abandonadas havia séculos: foi um dos primeiros a entrar em um sítio maia. Em 1787, voltando de Palenque, Antonio del Río redigiu um relatório com numerosos mapas e medidas dos monumentos. Em 1836, o advogado americano John Lloyd Stephens encontra o desenhista inglês Frederuck Catherwood, e ambos partem a Yucatán. Em julho de 1840, voltam a Nova York. Stephens publica ali, em 1841, *Incidents of Travel in Central America, Chiapas and Yucatán*. O livro causa sensação. Os dois homens revelam ao grande público a civilização maia com sua arquitetura, sua escultura, seus afrescos, suas estelas, sua escrita. E ali dão fim a elucubrações fantasiosas.

As Primeiras Decifrações

A DECIFRAÇÃO DA ESCRITA maia começou pelas datas e durações dos textos astronômicos. A essa altura, já era admitida a idéia de que a América antiga havia produzido civilizações tão importantes quanto as do Velho Mundo. A redescoberta dos códices e das inscrições gravadas, junto com a da obra de De Landa e a de textos indígenas posteriores à conquista, marca o início verdadeiro das decifrações. Os primeiros trabalhos revelaram que os maias utilizaram um sistema de unidade de tempo e dois tipos de numeração de base 20: compreende-se uma unidade principal, o *tun* (um ano de 360 ou 400 dias), seus múltiplos, como o *katun* (20 *tun*), o *baktun* (400 *tun* ou 20 *katun*) etc., e suas duas subunidades, o *uinal* (mês ou 1/18 de *tun*) e o *kin* (dia ou 1/20 de *uinal* ou 1/360 de *tun*). Uma das numerações é posicional e destinam-se à notação de algarismos isolados, a outra é não-posicional e liga cada algarismo à indicação da unidade que ele determina. Os dois tipos de numeração possuem zeros, tanto na posição final como na posição interior.

O único uso amplamente atestado das numerações maias é a notação das datas e durações. Desse ponto de vista, os maias se distinguem dos incas, que tinham registros da administração do império. Os monumentos e os códices maias mostram esses conhecimentos numéricos aplicados aos calendários e às efemérides dos principais planetas vistos a olho nu.



2. O SISTEMA PONTO-BARRA, criado quatro ou cinco séculos antes de Cristo, era utilizado pelos mesoamericanos para representar números de 1 a 19

3. OS DOIS CALENDÁRIOS MAIAS. O religioso, chamado de *tzolkin*, é baseado em dois ciclos, um de 13 posições ou números, materializado pelos algarismos de 1 a 13, e outro de 20 nomes de dias *(tabela a)*. O calendário civil, chamado de *haab*, é constituído de 18 "meses" *(tabela b)* de 20 dias e de um período de cinco dias, o *Uayeb*. Os calendários se combinavam, e uma data se exprimia sob a forma $\alpha X \beta Y$, em que α é o coeficiente (entre 1 e 13), X o dia religioso, β o indicador do dia (entre 0 e 19, ou entre 0 e 4 para o *Uayeb*) e Y o mês civil

O sistema "ponto-barra" *(ver figura 2)*, característico das culturas mesoamericanas, já era conhecido dos olmecas, mas não foi utilizado pelos astecas. Sabemos pelos *Livros de Chilam Balam*, redigidos em 1793 por um nativo aculturado, que os maias utilizavam pontos e barras para representar os inteiros de 1 a 13 e também que o ano era a unidade principal de medida do tempo. Todos os especialistas verificaram a legitimidade dessas informações para compreender a escrita maia dos inteiros de 1 a 19.

No fim do século XIX, Ernst Förstemann descreve precisamente o uso desses algarismos na notação das numerosas datas e durações do códice de Dresden. Ele observa que a cor é utilizada para diferenciar os números que representavam datas, escritas em vermelho, das durações, escritas em preto. Por exemplo, em um dos diversos almanaques do códice de Dresden, encontramos a série: 13-*Ahau* + 9 9-*Muluc* + 11 7-*Ahau* + G 1-*Ahau* + 10 11-*Oc* + 15 13-*Chicchan* + 9 9-*Ix* + 11 7-*Chicchan* + G 1-*Chicchan* + 10 11-*Men* + 15 13-*Oc* + 9 9-*Cauac* + 11 7-*Oc* + G 1-*Oc* + 10 11-*Ahau* + 15 13-*Men* + 9 9-*Kan* + 11 7-*Men* + G 1-*Men* + 10 11-*Chicchan* + 15 13-*Ahau*. Ele descobre que tais seqüências descreviam um curso no tempo: partindo da data de origem 13-*Ahau*, chegamos em nove dias (+9) à data 9-*Muluc*, de lá em 11 dias (+11) chegamos à data 7-*Ahau*, depois em 20 dias (marcado G) à data 1-*Ahau* etc. Esse curso percorre exatamente um ano religioso, chamado de *tzolkin*, de 260 dias, que se encerra seguindo um percurso em quatro etapas de 65 dias, cada uma composta por passos de 9, 11, 20, 10 e 15 dias.

Ao perceber que 9+11 = 20 e que 10+15 = 20+5, pode-se supor que os diferentes passos de deslocamento nesse almanaque poderiam ter sido motivados pela idéia de aproximar tão bem quanto possível o percurso no ano solar de 18 meses de 20 dias, completados por um período de cinco dias chamado de *Uayeb*.

Percebe-se também que os números das datas registradas pelo escriba se deduzem uns dos outros por uma adição *módulo 13* (7+20 = 1, 1+10 = 11, 11+15 = 13) e que os nomes dos dias se deduzem por uma adição *módulo 20* (*Ahau* + 20 = *Ahau*). Isso está ligado à natureza das datas maias *(ver figura 3)*: os 20 dias (ordenados) X do ano religioso são afetados por um número α variando de 1 a 13, de forma que cada uma das 260 datas religiosas é da forma αX. Deduz-se que +13 (ou +20) opera como uma translação que deixa invariantes os números α de uma data religiosa.

O glifo marcado por G representa o número 20. Fornecendo um novo número de apoio aditivo, esse símbolo estende, assim como os algarismos romanos X e C, a capacidade do sistema "ponto-barra" e permite escrever números superiores a 20. Para representar do número 21 ao 39, os escribas prefixavam um dos 19 algarismos "ponto-barra" ao glifo G, que se lia *uinic*, "homem", ou *kal*, "vintena".

Sabia-se, especialmente pela obra do bispo De Landa, que a numeração maia, falada e escrita, era toda de caractere vigesimal. Förstemann mostrou que os 19 signos precedentes, escritos na morfologia "ponto-barra", eram utilizados, fora dos almanaques, para marcar os algarismos dos números que representavam períodos grandes e muito grandes e que, nesse uso, os maias haviam adicionado um 20º signo, um zero, cardinal, freqüentemente escrito em vermelho nos códices.

Esses 20 algarismos (de 0 a 19) eram utilizados para representar números e, assim, efetuar cálculos aritméticos e/ou pôr em evidência os resultados obtidos. Tomemos por exemplo a página 24 do códice de Dresden. Além de uma tabela de 16 múltiplos de 2.920 (cinco vezes 584, número de dias do ano venusiano) e de quatro múltiplos de 260, essa página contém, embaixo e à esquerda, em três colunas adjacentes, algarismos que formam três números – 6.2.0., 9.9.16.0.0. e 9.9.9.16.0. Esses números vigesimais se transpõem mecanicamente em numeração decimal (6.2.0. = 6x360 + 2x20 + 0 = 2.200; 9.9.16.0.0. = 9x144.000 + 9x7.200 + 16x360 + 0x20 + 0 = 1.366.560; 9.9.9.16.0. = 9x144.000 + 9x7.200 + 9x360 + 16x20 + 0 = 1.364.360). Eles são religados por uma relação simples: o terceiro é a diferença do segundo e do primeiro 9.9.9.16.0. = 9.9.16.0.0. - 6.2.0. (1.364.360 = 1.366.560 - 2.200).

Duas Sintaxes

Os numerosos exemplos contidos nos códices confirmaram a hipótese de que essa é uma numeração de posição. No entanto, a escolha de um ano de cálculo de 360 dias (18 meses de 20 dias) gerou muita discussão e ainda conduz certos autores a não reconhecerem que os maias inventaram uma verdadeira numeração de posição, com um zero que não vem de um simples branco de separação.

Um fato notável é que os escribas maias usaram de modo pertinente as duas dimensões da página. Fizeram isso distinguindo o espaço (horizontal) de separação dos constituintes de um número. No contexto maia, não confundimos jamais os números •• "2" e ⁚ "21".

Os resultados obtidos foram utilizados para decifrar as inscrições em monumentos. Diferentemente dos códices, nas estelas e nas construções as durações são representadas como "números de", isto é, por notações em que os algarismos são seguidos do nome das unidades que eles denominam: por exemplo, 9-*baktun* 17-*katun* 0-*tun* 0-*uinal* 0-*kin* aparece na estela de Quirigua *(ver figura 4)*, e não 9.17.0.0.0., como seria escrito em um códice. Essa duração equivale a 1.418.400 *kins*, ou dias.

Os constituintes numéricos são escritos em ordem decrescente (mais raramente crescente) dos glifos de ponto ou unidade de tempo. Os zeros, redundantes nesse sistema numérico de disposição, são entretanto sempre escritos, tanto em posição final como em posição interior.

Os escribas utilizavam, além dos algarismos "ponto-barra", um segundo jogo de algarismos cefalomórficos (em forma de cabeças). A maior parte das durações era representada por números com cinco algarismos, começando por um 9 (quatro pontos e uma barra) ou por uma "cabeça barbuda". Esse glifo cefalomórfico devia ser o 9 do segundo jogo de algarismos. Excepcionalmente, os maias representaram os coeficientes das unidades de tempo por personagens inteiros. Esse sistema não difere fundamentalmente do cefalomórfico e não foi difícil decifrá-lo.

4. DATA DE CONSTRUÇÃO da estela de Quirigua. Após um glifo introdutório *(a)*, que indica o mês em que o monumento foi erguido, lê-se nos cinco primeiros glifos *(b)* o número de dias transcorridos desde o início da era maia, contados em anos de 360 dias e em base 20: 9 *baktun* 17 *katun* 0 *tun* 0 *uinal* 0 *kin* (1.418.400 dias). Trata-se de uma numeração de disposição, mas que inclui um zero (cardinal). Lê-se também a data *(c)* do calendário religioso (13 *Ahau*) e a data do calendário civil *(d)*, indicada embaixo (18 *Cumhu*); e datas cujo significado teria sido possível deduzir dos glifos precedentes

A exemplo do sistema posicional, inumeráveis verificações confirmaram as hipóteses da decifração das durações marcadas em sistemas não-posicionais de estilo normal e de estilo cefalomórfico.

Os Calendários

COMO SEUS VIZINHOS mesoamericanos, os maias tinham um ano religioso de 260 dias, o *tzolkin*. Cada dia era designado por uma expressão da forma αX, composta por um número α e um nome de dia X, obtido pelo produto de dois ciclos. Os números α são os inteiros de 1 a 13. Os nomes dos dias constituem um ciclo de 20 elementos *(ver figura 3)*. Como nossa segunda-feira 3, terça-feira 4, quarta-feira 5, os números e os nomes crescem ambos em uma unidade quando se passa de um dia ao seguinte.

Os maias tinham também um ano solar de 365 dias, o *haab*, com 18 meses de 20 dias e um período complementar de 5 dias chamado *Uayeb*. Cada dia do ano solar era designado por uma expressão do tipo βY (constituído de um número β e de um nome de mês Y), obtida pelo produto desses dois ciclos. Os números β dos dias são os inteiros de 0 a 19, e os números dos dias do período *Uayeb* são os inteiros de 0 a 4. Os nomes dos 18 meses mais o do período complementar formam um ciclo de 19 elementos *(ver figura 3)*. Como nosso 3 de julho, 4 de julho..., os números crescem em uma unidade enquanto permanecemos no mesmo mês, senão o número passa a zero e o nome do mês é substituído pelo seguinte da lista.

Uma data maia se apresenta assim sob a forma $\alpha X \beta Y$, obtida pelo produto do ano religioso e do solar, por exemplo 4 *Ahau* 8 *Cumku*. A data do dia seguinte será 5 *Imix* 9 *Cumku*. A coordenação do ano religioso αX e do solar βY é típica dos maias. O produto $\alpha X \beta Y$ é por sua vez um novo ciclo, uma espécie de "superano" de 18.980 dias (o mínimo múltiplo comum entre 365 e 260). Fala-se de um ciclo de calendário igual a 52 anos solares e a 73 anos religiosos.

Quando se tem uma data de origem, pode-se identificar data e duração. A data de origem dos maias era um 4 *Ahau* 8 *Cumku*. A maior parte dos especialistas concorda em dizer que essa origem, também descrita 13.0.0.0.0., corresponde a 13 de agosto de 3114 a.C. Uma data também poderia, portanto, ser marcada como uma duração. Mesmo sendo menos expressiva que 6 *Ahau* 13 *Yaxin*, a data 9.1.0.0.0. tem a vantagem de ser "absoluta"; a data 6 *Ahau* 13 *Yaxin* é "relativa", pois se repete a cada ciclo do calendário. A transposição de um sistema de datação para outro se faz mecanicamente. Trata-se de um problema de cálculo que os escribas resolveram, mas os arqueólogos não encontraram os algoritmos que eles usavam.

Sendo ambos os números inferiores a 20, a notação de α e β de uma data exige apenas o conhecimento dos algarismos vigesimais. Os maias utilizavam todos os estilos apresentados anteriormente, isto é, as morfologias "ponto-barra", cefalomórfica e antropomórfica. Uma exceção é o zero das datas solares: enquanto o algarismo zero cardinal (o das durações) existe, os maias não o usavam para representar datas de anos solares cujo coeficiente β fosse um zero ordinal que indicasse uma posição. O zero da data 0 *Pop* não é jamais representado pelo mesmo zero das durações (por exemplo o zero de 0 *uinal*). Assim, os maias distinguiram as faces ordinal e cardinal do número.

Descrevemos as numerações de tipo posicional e não-posicional nos estilos "ponto-barra", cefalomórfico e antropomórfico. Em todo caso, uma duração *d* é representada por um número (ou um *número-de*) que se analisa como uma soma ordenada de produtos, representados pela fórmula $d = \Sigma c_i P_i$. Nessa fórmula, c_i representa um coeficiente sempre marcado em maia por um algarismo, e P_i uma unidade ou período de tempo; os P_i são marcados por um glifo de ponto nos sistemas não-posicionais, mas, em numeração de posição dos códices, não o são (são somente marcados pela posição dos c_i). A fórmula $\Sigma c_i P_i$ resume toda a "sintaxe" dos sistemas maias de notação das durações ou dos números.

5. A RODA DOS *KATUNS* mostra que os escribas maias conheciam as translações no tempo mantendo o nome dos dias (*Ahau*, neste exemplo) invariante

Diego de Landa descreveu uma figura à qual chamou de *Roda dos katuns (ver figura 5)*, que mostra uma seqüência de datas progredindo ao passo de 20 anos ou de um *katun*: *Ahau XI Buluc Ahau; Ahau IX Bolon Ahau* etc. Além da capacidade de sintetizar informação, a figura prova que os escribas dominavam os efeitos de uma translação temporal. Sabiam, por exemplo, que todo deslocamento de um *katun* deixa invariante o nome dos dias religiosos (aqui, o nome *Ahau*) e recua o número em duas unidades (11, 9, 7...).

O Saber dos Escribas

A ANÁLISE DESSE CONJUNTO de resultados aritméticos permitiu a Goodman enunciar diversas hipóteses. Uma delas estipula que o ano de que trata a roda *dos katuns* não é nem o ano religioso de 260 dias nem o ano civil de 365 dias: os deslocamentos por 20x260 e 20x365 dias não fazem recuar em dois o número α do dia invariante *Ahau*. Para isso, é necessário um ano de *x* dias, como $20x = -2$ (*módulo* 13). O menor *x* que convém é 360. Daí, um *katun* é igual a 7.200 dias. Todo deslocamento de 7.200 dias deixa *Ahau* invariante (7.200 = 0*mod*20) e faz α recuar duas posições (7.200 = -2*mod*13).

Vimos que todo códice é uma seqüência alternada de datas e durações. Encontramos também outro tipo de tabelas onde o escriba parece não indicar as durações que separam as datas. A página *32a* do códice de Dresden *(ver figura 6)* contém uma tabela de quatro colunas e cinco linhas, isto é, 20 células contendo cada uma o nome de um dia. Em cima, figuram cinco ocorrências do número 13: é o número α dos 20 dias da tabela.

As datas se sucedem com uma regra que depende da ordem de leitura adotada. O cálculo mostra que elas são eqüidistantes e formam uma progressão de razão de 169 dias (leitura em linha, da esquerda para a direita) ou 156 dias (por coluna, de alto a baixo). Segundo outra ordem de leitura (deslocamentos retrógrados), as datas estão em progressão de 91 dias (leitura por linha) ou de 364 dias (leitura por coluna). Como escolher?

Visivelmente, a tabela diz que esses valores deixam invariante o número 13 e especifica como varia o nome do dia. Mas há mais. O valor 364, com efeito, chama seu sucessor 365, o qual evoca inevitavelmente o ano solar. Em outras palavras, desconsiderando uma unidade, o *haab* é divisível por 13. O escriba sabia disso? Sim, se utilizasse a ordem de leitura que distingue os números 91 e 364. Esses números são significativos para o escriba, pois 364 é o ano zodiacal dos 13 signos-constelações de 28 dias cada um. É provavelmente a ordem canônica de leitura, e podemos admitir que os escribas distinguiam esses dois valores.

O conjunto das tabelas de datas e das tabelas de múltiplos parece ser um algorimo graças ao qual o escriba determinava datas distantes por passos de 91 dias, de 364 dias ou por qualquer combinação dos múltiplos desses dois passos. Todas essas translações deixam o número invariável. Que problemas essas ferramentas resolviam?

O texto da estela 3 de Piedras Negras, na Guatemala, diz que a rainha Katun Ahau nasceu em 5 *Cib* 14 *Yaxkin*, que 12-*tun* 10-*uinal* 0-*kin* passou até seu casamento e ainda 1-*katun* 1-*tun* 11-*uinal* 10-*kin* até o nascimento da princesa Kin Ahau. O escriba, portanto, foi capaz de calcular ou de verificar que uma data é a imagem de outra por uma translação e de dizer quantos dias separam duas determinadas datas. É o primeiro problema da aritmética maia. Consiste em determinar a data $\alpha' X' \beta' \Upsilon'$ conhecendo a distância $\Sigma c_i P_i$ que a separa de uma data $\alpha X \beta \Upsilon$. Para as durações inferiores a um ano, basta ler o calendário ou conhecer a sucessão dos constituintes α, X, β e Υ das datas. Para as durações mais importantes, é necessário recorrer ao cálculo.

Dois Problemas

Os algoritmos subjacentes às tabelas de datas e às tabelas de múltiplos ilustram os métodos de resolução dos problemas no caso de longas durações. Esses métodos eram provavelmente baseados no conhecimento das durações que deixavam invariante toda uma data ou parte dela. O ciclo de calendário e seus múltiplos desfrutam dessa propriedade. A *Roda dos katuns* deixa o nome do dia invariante e reduz seu número em duas unidades. A tabela de datas precedente diz que os números α são invariantes por translação de 364 dias e que os nomes de dia avançam em 4. O fato de essas propriedades terem sido inscritas em tabelas prova que os escribas conheciam tais modificações ou tais invariâncias, e isso para toda sorte de ciclo. Esse conhecimento sem dúvida permitiu a eles encontrar, por exemplo, a imagem da data especificada.

Um segundo tipo de problema consiste em determinar a distância $\Sigma c_i P_i$ que separa duas determinadas datas, $\alpha X\beta\Upsilon$ e $\alpha'X'\beta'\Upsilon'$. Sua dificuldade provém do fato de que o desconhecido é uma função (uma translação), e não uma imagem. Habituados a todo tipo de ciclo, os escribas certamente tiveram a idéia de decompor a dificuldade. Por exemplo, a estrutura da multiplicação do ciclo do calendário convida a decompor em movimentos mais elementares a translação a descobrir, e a procurar transformar separadamente αX em $\alpha'X'$ e $\beta\Upsilon$ em $\beta'\Upsilon'$. Da mesma forma que para ler um deslocamento sobre um quadriculado, pode-se decompor a translação desconhecida em um movimento no ano religioso e um outro no ano civil. Chegamos assim a duas estratégias simples. Há inicialmente o deslocamento no ano religioso por um movimento dR, passando de αX para $\alpha'X'$, sem se preocupar com a parte solar. Ou ainda, começamos pelo deslocamento em um ano civil por um movimento dS, permitindo passar de $\beta\Upsilon$ para $\beta'\Upsilon'$ sem se preocupar com a parte religiosa.

Nos dois casos, o primeiro movimento modifica a parte que não foi considerada. Assim, dS transforma a posição $\beta\Upsilon$ em $\beta'\Upsilon'$ e modifica correlativamente a parte αX, que se torna $\alpha_1 X_1$; resta a encontrar um movimento que conserve $\beta'\Upsilon'$ e faça a passagem de $\alpha_1 X_1$ para $\alpha'X'$. Forma-se o esquema de resolução: encontrar dS e calcular $\alpha_1 X_1$ de modo que $\alpha X\beta\Upsilon + dS = \alpha'X'\beta'\Upsilon'$. Ou ainda encontrar dR e recalcular $\alpha'X'$ de modo que $\alpha_1 X_1 \beta'\Upsilon' + dR = \alpha'X'\beta'\Upsilon'$.

Tomemos um exemplo: determinemos a distância d das datas 13 *Ahau* 18 *Kankin* e 8 *Oc* 13 *Yax* com a ajuda da segunda estratégia. Para encontrar o primeiro movimento, dS, calculamos (ou lemos em um calendário) a distância entre as datas solares 18 *Kankin* e

13	13	13	13
Manik	Cib	Chicchan	Ix
Chuen	Ahau	Muluc	Etznab
Men	Kan	Bem	Ik
Cauac	Lamat	Caban	Cimi
Akbal	Eb	Imix	Oc

6. O CÓDICE DE DRESDEN, em sua página 32a, contém uma ilustração *(em vermelho)* que os escribas utilizavam como tabela de múltiplos de 91 e de 364 dias. Esses números correspondem ao passo de leitura quando se lê a tabela respectivamente por linhas e por colunas segundo uma leitura retrógrada, isto é, da direita para a esquerda e de baixo para o a alto

13 *Yax*: dS = -4.5. (85 dias) e, portanto, $\alpha_1 X_1$ = 6 *Men*.

Resta a determinar dR, o deslocamento no ano religioso, deixando invariável a data civil 13 *Yax*, e ao mesmo tempo transformar 6 *Men* em 8 *Oc*. Por definição, as translações múltiplas de um ano deixam invariantes as datas solares, como 13 *Yax*. O movimento dR deve portanto ser múltiplo de 365. Como para o primeiro movimento, o escriba calcula a distância entre αX = 13 *Ahau* e $\alpha'X'$ = 8 *Oc*. Encontra 15.

Uma tabela dos múltiplos de 365 lembra o escriba que uma translação de um ano aumenta α em uma unidade e X em cinco. Ele deduz daí que uma translação de 15 anos aumenta α em 15 e ao mesmo tempo avança X em 15 vezes 5 lugares, isto é, em 15 (*módulo* 20). O segundo movimento foi descoberto, dR = 15. x 1.0.5. Esse produto se escreve 15.3.15. Daí a solução $d = dS + dR$ = -4.5. + 15.3.15. = 14.17.10.

Devemos creditar aos maias técnicas elaboradas de contagem e de localização no interior de uma profusão de ciclos cujas múltiplas combinações, geradoras de ciclos cada vez maiores, eles dominavam com segurança. Também conheciam as principais propriedades da invariância dos diversos constituintes de uma data e de numerosos atalhos que mostram como se comporta tal elemento de uma data sob um deslocamento de dada amplitude. E, certamente também, o conhecimento do cálculo (adição e subtração) segundo um *módulo*, e mesmo resultados gerais sobre as translações incidentes nas datas.

Por outro lado, uma história comparada da numeração escrita não pode ignorar que assistimos, com os maias, a diversas inovações: a invenção "corriqueira" de um glifo para representar o zero cardinal – corriqueira porque ela aconteceu também na Mesopotâmia, na Índia e na China; a invenção "única" de um zero ordinal, utilizado na notação do número do primeiro/último dia de uma "trezena" de datas de ano religioso; a invenção "estonteante" dos glifos de pontos para representar as unidades sucessivas do sistema das medidas do tempo. O estonteamento provém do fato de que inscrições mais antigas, de tipo não-posicional sem zero, sobretudo as notações olmecas, não comportam glifos de ponto. SA

***André Cauty** é pesquisador do Centro de Estudo das Línguas Indígenas da América (CNRS), em Villejuif.*

PARA CONHECER MAIS

The solar year and the Dresden Codex. E. Siarkiewicz, em *Literatures Journal. A Review of American Indian Texts and Studies*, vol. 17, nº 2, Penn State Mc Deesport, págs. 136-159, 2001.

Os maias, especialistas na análise numérica, são os únicos a ter distinguido o zero cardinal (indicador de quantidades) para contar durações do zero ordinal (marcador de posição), utilizado para as datas

1. ESCRIBAS maias faziam truques com datas e durações; ao lado, desenho em vaso do período clássico (séc. III ao IX) mostra um dia de trabalho

Os dois zeros maias

Por André Cauty e Jean-Michel Hoppan

Todas as línguas distinguem singularidade e pluralidade, o que permite exprimir não só o par, a unidade e a metade, mas também a ausência, a quantidade nula. Nesse sentido, os números são instrumentos universais para a aventura aritmética. O uso do algarismo zero, porém, é uma curiosidade bem mais rara. Ele aparece somente em culturas com uma escrita numérica de tipo particular, a de posição, em que os números são registrados com algarismos cuja ordem indica as quantidades a que ela se refere – por exemplo, as unidades, as dezenas as centenas... Até hoje, arqueólogos e historiadores descobriram quatro numerações escritas de posição com zero: na Mesopotâmia, na Mesoamérica, na Índia e na China.

A mais antiga numeração de posição nasceu na Mesopotâmia, ligada às necessidades de contagem e de medida das primeiras civilizações. Era de uso corrente em 1900 a.C., mas desprovida de zero. Os escribas se contentavam em deixar um espaço branco entre os algarismos. Como o espaço não era medido, uma série de algarismos sucessivos podia formar números diferentes, mas a ambigüidade não incomodava os escribas.

O primeiro zero conhecido apareceu tardiamente, na Babilônia, alguns séculos antes de Cristo, sob a forma de uma marca gráfica usada para indicar uma separação. Seu uso permaneceu limitado e não eliminou todas as ambigüidades: sua ausência na posição final equivale a não conferir precisão à unidade em uso. O emprego desse primeiro zero, porém, não teve continuidade.

Origens do Zero

O ZERO QUE USAMOS hoje veio da Índia, onde uma diversão era nomear números grandes e calcular, por exemplo, combinações de versos possíveis segundo uma dada estrutura poética ou gramatical. O zero era então indispensável, e da palavra usada para designá-lo, *sunya* ("vazio"), vieram nossos termos "cifra" e "zero". Depois ele ganhou a Europa por intermédio dos árabes, mas por muito tempo, essa numeração decimal foi tida como diabólica no Ocidente.

Uma vez que essa numeração foi aceita, a produção de outras civilizações ficou um pouco esquecida. Com efeito, a transparência do sistema provoca a ilusão de que o número é uma abstração cardinal, que pura e simplesmente se anotaria na superfície de escrita, sem tradução. Seria a numeração decimal o fruto de uma gênese ou de uma evolução necessária? Um bem universal?

Essas convicções simplistas são falsas, pois, de um lado, o zero decimal não é universal – sua difusão planetária deve menos à necessidade aritmética do que à expansão árabe-muçulmana e seu legado ao Ocidente, que também disseminou sua cultura. Além disso, o número não se reduz a seu aspecto cardinal. Ele possui outras facetas, em especial a ordinal e a fracionária. Por culpa de velhos reflexos etnocêntricos, esse deslumbramento acaba obscurecendo as realizações de outras culturas, como a dos maias da época clássica (do século III ao IX). Restabeleçamos os fatos.

Assim como seus predecessores, os maias parecem não ter tratado numericamente questões da administração de suas cidades: o escriba não mede as coisas ou os seres, mas ele anota datas e mede durações. Para esse uso, os exemplos de grandes números são abundantes.

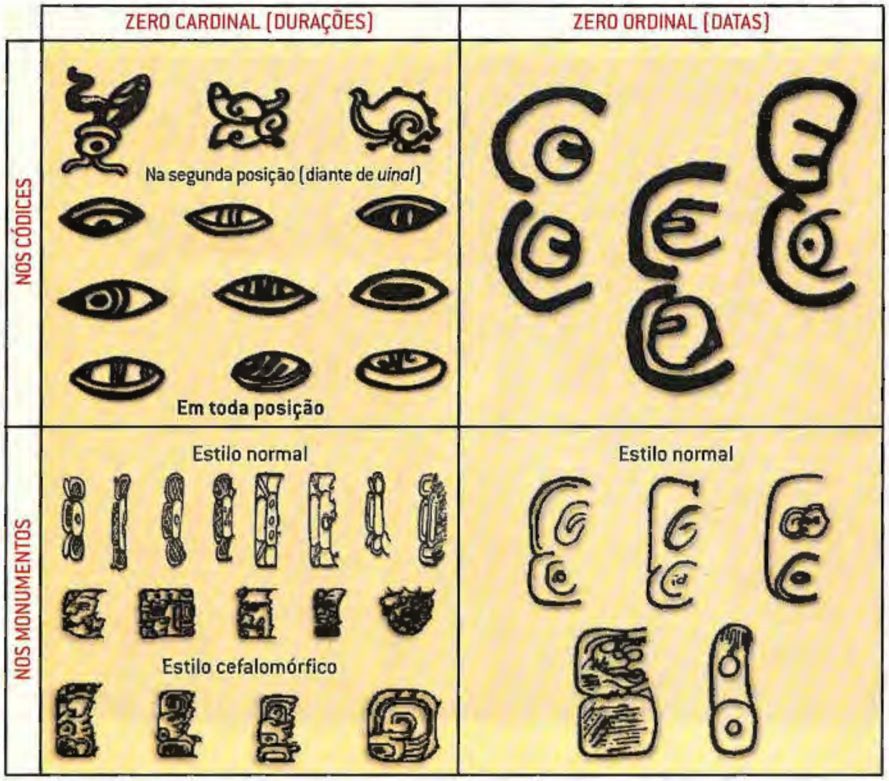
Os maias dispunham de dois calendários *(ver artigo na pág. 10)*. Um religioso *(o tzolkin)*, constituído de 260 dias, e outro solar ou civil *(o haab)*, de 365 dias. A combinação dos dois calendários fornece a data completa de um dia, como a encontramos em numerosos documentos, marcada pelas quatro informações $\alpha X \beta Y$, por exemplo 4 *Ahau* 8 *Cumku*. O conjunto das combinações totaliza 18.980 dias, o chamado ciclo do calendário.

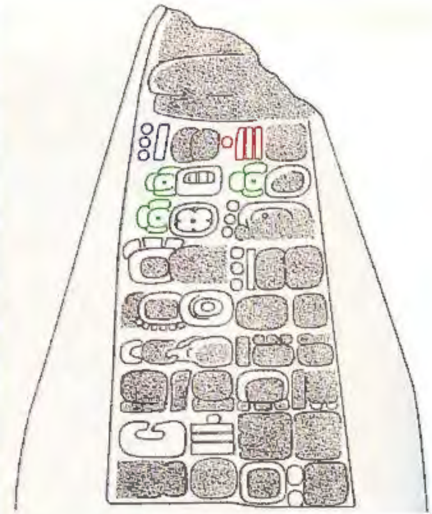
Os maias inventaram os glifos de ponto (similares à vírgula de nosso sistema decimal), contribuindo assim para aprimorar o sistema e para racionalizar a escrita das durações. Os glifos de ponto apresentam numerosas variantes que distinguem entre o estilo normal e o cefalomórfico (o signo tinha a forma de uma cabeça). Graças a essa concretização do sistema das unidades de tempo, os escribas maias exprimiam todas as durações sob a forma $\Sigma c_i P_i$. P_i representa explicitamente um período determinado e é afetado de um coeficiente, o c_i correspondente *(ver figura 3)*. Assim, a escrita "9.15.0.0.0." nos códices corresponde à escrita nos monumentos "9 *baktuns* 15 *katuns* 0 *tun* 0 *uinal* 0 *kin*", que indica todas as unidades sucessivas.

A escrita não-redundante (ou concisa) obriga a escrever os coeficientes em uma ordem estrita e a marcar os zeros (o que os babilônicos não faziam). Por outro lado, a escrita redundante não obriga nem a marcar os zeros nem mesmo a respeitar ordem, ainda que essa "facilidade" não tenha sido utilizada.

O sistema de glifos de ponto servia para exprimir grandes durações, que podiam ser lidas como um tipo de data absoluta. Oriundas de durações, essas datas são anotadas de acordo com sua distância de uma origem arbitrária. Assim, toda duração $\Sigma c_i P_i$ podia ser traduzida por $\alpha X \beta Y$ e vice-versa. Por exemplo, a duração 9-*baktun* 1-*katun* 0-*tun* 0-*uinal* 0-*kin*, ou 9.1.0.0.0., na escrita dos códices conduz à data 6 *Ahau* 13 *Yaxin* dentro do Ciclo do Calendário.

Tais equações são numerosas nos monumentos do período clássico e mostram que os escribas maias marcavam todos os zeros sistematicamente, mesmo quando em posição final e ainda que eles sejam redundantes nesse tipo de notação de duração/data.





2. A ESTELA 19 de Uaxactún *(acima)* registra o mais antigo uso do zero cardinal maia. Lê-se a data (expressa por uma duração desde a origem dada) 8 *baktun (azul)* 16 *katun (vermelho)* 0 *tun* 0 *uinal* 0 *kin (verde)*, ou 2 de fevereiro de 357, segundo a correlação mais aceita (GMT)

3. A CLASSIFICAÇÃO DOS ZEROS maias *(à esq.)* evidencia o zero cardinal (empregado nas durações) e o zero ordinal (nas datas). A forma dos zeros escritos nos códices difere das gravações nos monumentos. Enfim, distingue-se o estilo normal do cefalomórfico

Zeros Diferentes

Entre a aparição do glifos de ponto (séc. II) e o do zero (séc. IV), os escribas maias se contentaram, como os babilônios, em não escrever nada quando uma unidade particular não contribuía à expressão de uma duração. No entanto, ao contrário do uso babilônico, esse branco é verificado quando os zeros caem no fim de um número. Não resultava daí nenhuma ambigüidade, já que todas as unidades eram explicitamente inscritas.

O rigor da análise dos números (as datas em lógica ordinal e as durações em lógica cardinal) e a precisão dos escritos conduziram os maias a distinguir dois signos de zero. Jamais os escribas confundiram as duas noções ou trocaram as notações.

Assim como os outros 19 algarismos da numeração, o primeiro signo, ou zero cardinal, serve para formar a escrita das durações. Ele marca a não-contribuição de uma unidade particular. Sua mais antiga expressão remonta a 2 de fevereiro de 357 *(ver figura 2)*.

O segundo, ou zero ordinal, é mais antigo. Serve para marcar o primeiro dia de um ciclo que forma cada um dos meses do ano civil. É um número de ordem, um ranque, que se encontra na escrita de datas βY do *haab*, sempre seguido de um glifo de mês, como 0 *Pop*, equivalente a nosso 1º de janeiro.

Os dois signos apresentam variantes e têm distribuições diferentes. Nos códices em que o escriba não escrevia os glifos de ponto, o zero cardinal é um algarismo que não deve ser precedido ou seguido por outro algarismo para formar a escrita de um número. Por outro lado, nos monumentos, o zero é um determinante (um coeficiente) e é seguido do glifo de ponto da unidade que não contribui, nesse caso, à expressão da duração. O zero ordinal não aparece jamais nesses contextos, mas sempre diante de um nome de mês para indicar seu primeiro dia.

No início do século XX, o antropólogo Sylvanus Morley estudou essas distribuições e distinguiu os dois zeros. Ele classificou igualmente o conjunto de suas variantes cruzando o suporte (se era escrito em um códice ou em algum outro objeto) e o estilo (normal ou cefalomórfico) da escrita *(ver figura 3)*. Essa classificação demonstra que esses glifos levam, independentemente do suporte e do estilo, a dois conceitos diferentes; os dois zeros maias. As origens diferentes dos dois signos confirmam igualmente a distinção. O zero ordinal deriva da idéia de ascensão, de advento, de início, e apresenta poucas variações.

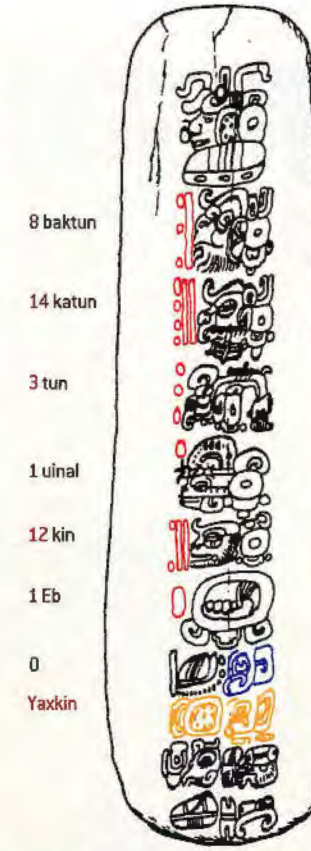
O zero cardinal se associa à idéia de conclusão, de fim, de realização, talvez também de bifurcação: apresenta variantes. Por exemplo, em estilo cefalomórfico, o zero cardinal é caracterizado pela mão de conclusão, a qual pode ter o polegar em direção oposta ou paralelo aos dedos: o nome de um lugar, gravado sobre um monumento (a estela E de Quiriguá) e na superfície 3 do sítio Q, provou recentemente que essas duas representações da mão são substituíveis.

O fato de o zero cardinal maia evocar a idéia de conclusão permite compreender que ele admite a variante, paradoxal a um ocidental, de substituir o signo 20, o que vemos na estela 5 de Pixoy: o zero cardinal foi representado pelo glifo do 20 lunar na inscrição 9-*baktun* 13-*katun* 20/0-*tun* 20/0-*uinal* 20/0-*kin*.

Etimologias Distintas

EMPREGA-SE O ZERO cardinal exatamente como um zero de posição, isto é, como um coeficiente determinando a contagem nula da unidade de tempo que não contribui para a expressão da duração representada. Nos códices, as unidades não são escritas, e há uma "verdadeira" numeração de posição. Nos monumentos, todas as unidades são explicitamente representadas, cada uma com seu coeficiente. É uma numeração de posição redundante, que podemos classificar como "de disposição", enfatizando que ela possui um zero. É dessa maneira que foram gravadas as três mais antigas ocorrências do zero cardinal maia em Uaxactún, na Guatemala. Em outras palavras o zero cardinal é um determinante, e portanto um signo dependente, obrigatoriamente seguido de um classificador, como um glifo de ponto.

Em sua primeira aparição, o zero cardinal tem a forma de uma flor de quatro pétalas. Sempre junta de um glifo de ponto, a parte direita desse signo desaparece no local da junção. Esse signo foi a forma mais comum do zero cardinal maia até o fim do período clássico. O signo do dia maia, de valor fônico *kin*, teve igualmente a forma de uma flor. O signo do dia na escrita dos zapotecas, um povo vizinho, é idêntico ao zero cardinal maia.



4. A PLACA DE LEYDE é a mais antiga testemunha do emprego do zero ordinal. No verso dessa peça de jade, após a duração "8 *baktun* 14 *katun* 3 *tun* 1 *uinal* 12 *kin*" e a data religiosa "1 *Eb*" *(números em vermelho)*, pode-se ler a data civil "0 *Yaxkin*" *(zero em azul e mês em laranja)*, que seria a data da ascensão de um soberano ao poder. Vê-se também, sob o zero ordinal, o glifo de ascensão "ele subiu ao trono"

O zero ordinal aparece pela primeira vez no ano 320 em uma peça de jade *(ver figura 4)*. O zero é seguido da expressão do mês *Yaxkin*. O signo do zero ordinal não foi inventado para esse uso, pois já era utilizado para marcar a ascensão de um soberano ao poder. Essa peça de jade testemunha os dois usos precedentes, registrados antes de sua diferenciação. De fato, na seqüência da notação 0 *Yaxkin* encontra-se a da ascensão do soberano, representada na frente da placa. O signo de ascensão deriva do picrograma de entronização representado, desde os primeiros textos, pelo desenho da bacia de um homem sentado, visto de perfil. A partir desse pictograma, chega-se tanto ao glifo de ascensão como ao glifo do zero ordinal.

Até o período pós-clássico (do século IX à chegada dos espanhóis, no século XVI), o pictograma de ascensão permaneceu a única forma gráfica do zero ordinal. O princípio cíclico introduz uma variante na escrita da data do primeiro dia de um mês do *haab*. Essa variação repousa na bivalência dos pontos de início e de chegada de cada ciclo: o ponto de chegada é sempre o ponto de partida do ciclo seguinte. A variante consiste em nomear o primeiro dia de um mês como seguinte ao último do mês precedente – como se o 1º de janeiro fosse designado 32 de dezembro.

As variantes sistemáticas são bem difundidas. Por exemplo, numa padieira de Yaxchilán, em Chiapas, o dia equivalente a 20 de junho era um 0 *Mol*. No entanto, foi marcado como 20 *Yaxkin*, isto é, como o 21º dia do mês precedente (já que se parte de zero, e não de um, como em nosso calendário).

Gênese dos Números

DIVERSAS RESPOSTAS foram dadas à pergunta "de onde vem o número?". O matemático Georg Cantor distinguiu e construiu a axiomática do ordinal e do cardinal. Para o pensamento natural, o lingüista Jean-Paul Caprile mostrou que muitas gesticulações numerais distinguem o gesto do número do da quantidade. Por exemplo, na França, o gesto para "quarto" (o dedo mínimo permanece dobrado) e para "quatro" (o polegar é apoiado sobre a palma) são diferentes. Em outras palavras, a gesticulação numeral se reparte em ordinal e cardinal.

Sozinho, o pensamento mesoamericano produziu dois zeros. Sem medir sua importância, Morley distinguiu a distribuição das variantes dos significantes dos dois zeros maias. Confundindo-os numa única transcrição (pelo zero decimal), ele impediu a hipótese de que os escribas haviam produzido dois conceitos e distinguido dois zeros. Um de nós (Jean-Michel Hoppan) organizou as diferentes inovações maias na ordem de sua criação e estabeleceu suas etimologias. E, por um enfoque interdisciplinar, cruzamos os pontos de vista teóricos e montamos, em um quadro dinâmico, os dados factuais.

Estes últimos permitiram concluir que os maias são os únicos arimméticos da Antigüidade a ter construído uma numeração de posição com dois zeros, que lhes permitiu exprimir, com precisão de 24/301 dias, a duração média da revolução sinódica de Vênus, isto é, o tempo necessário para que esse planeta retome ao mesmo lugar no céu. Os matemáticos de hoje podem definir perfeitamente os dois zeros: um é claramente cardinal, e o outro, claramente ordinal. SA

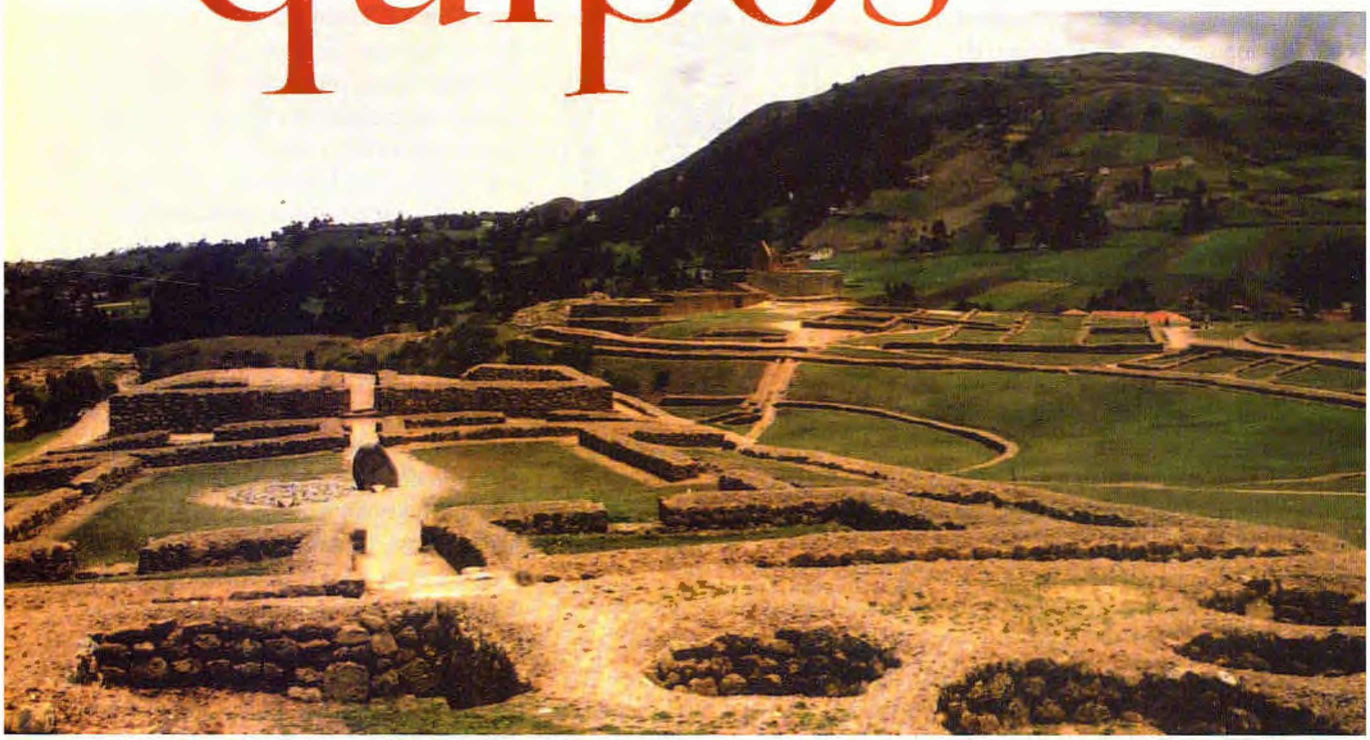
André Cauty *e* ***Jean-Michel Hoppan*** *são pesquisadores do Centro de Estudo das Línguas Indígenas da América (do CNRS), em Villejuif.*

PARA CONHECER MAIS

Numération et action. Le cas des numérations mayas. A. Cauty, J.-M. Hopan e É. Trelut, em *Journal des Anthropologues*, nº 85-86, 2001.

O enigma dos quipos

Por Loïc Mangin



Os incas registravam seus números em confecções minuciosas de cordas e nós. Pesquisadores tentam desvendar se essa era também a forma de escrever a língua quíchua

Em 1532, irrompeu uma guerra entre dois irmãos inimigos incas: Atahualpa, instalado em Quito, no Equador, e Huascár, de Cuzco, no Peru. Essa querela fratricida, resultante da divisão do império após a morte do pai deles, Huayna Cápac, sete anos antes, precipitou a queda dessa civilização, pois, no mesmo ano, o espanhol Francisco Pizarro desembarcou na costa equatoriana com planos de conquista. O enfraquecimento do império e as desavenças familiares lhe facilitariam imensamente a tarefa.

Alguns anos mais tarde, o historiador mestiço Garcilaso de la Vega, o Inca, aprendeu a língua dos indígenas e percorreu o império colonizado, recolhendo tradições. Segundo sua descrição, os índios, quando iam a Cuzco para pagar tributos aos novos soberanos, amarravam cordas de uma ou mais cores, nas quais anotavam os valores (números) com nós. Essas cordas eram em seguida enfileiradas e presas em volta de uma corda principal, como franjas *(ver figura ao lado)*. Tais artefatos são conhecidos como quipos ("nó" em quíchua, a língua dos incas), que além de servirem para numeração, também teriam sido depositários de uma informação literária cuja decifração ainda divide os especialistas.

O império inca não conhecia a escrita, e nesse Estado bem organizado, onde tudo era minuciosa e metodicamente repertoriado, os quipos eram o único meio de transportar uma informação. Eles serviam para as estatísticas do Estado, como recenseamento, estocagem, mineração, composição da mão-de-obra, entre outros, e cada quipo constituía um livro contábil. Além dos bens materiais e humanos, essas cordas com nós também continham datas importantes da história, da música, de leis e de tratados de paz.

As mensagens eram transportadas por uma rede de rotas que utilizava corredores, com os mensageiros se revezando de posto em posto até o destino final.

Somente os administradores, ou guardiões, chamados *quipucamayocs*, conheciam a chave dos quipos. A maior parte desses cordões que estavam armazenados em Cuzco foi destruída pelos generais de Atahualpa e, mais tarde, pelos oficiais reais, obedecendo à ordem do vice-rei Francisco de Toledo, de eliminar as tradições. Outra foi queimada em fogueiras ou por padres que incendiavam ídolos e objetos de culto daquela sociedade.

Anatomia de um Quipo

OS RAROS EXEMPLARES (cerca de 500) que podemos admirar hoje nos museus foram encontrados em sítios funerários, pois os incas eram enterrados com os objetos que utilizavam quando vivos.

De acordo com os relatos feitos por

JOSÉ OSTER/MUSÉE DE L'HOMME, PARIS

RUÍNAS DE UM BASTIÃO inca *(à esq.)*, em Ingapirca, no Equador, cujos recursos humanos ou alimentícios eram enumerados, como em todo o império, em livros contábeis originais: os quipos *(à dir.)*, dispositivos constituídos de cordas em que nós exprimem números, entre outras informações. Os *quipucamayocs*, isto é, os guardiões dos quipos, eram os únicos detentores do saber referente à confecção desses artefatos de la Vega, o artefato era constituído de uma corda espessa, a principal, à qual são ligadas outras de 20 a 50 cm de comprimento. Um quipo pode conter até 2 mil cordas. Se ele for esticado sobre um plano horizontal *(ver figura abaixo)*, é possível observar que algumas dessas cordas, as pendentes, são orientadas em um sentido, e as superiores em outro (as amarras são bem presas e não deixam dúvidas quanto à orientação das cordas). Algumas outras, as secundárias, são presas às superiores ou às pendentes. Por fim, a maior parte das cordas tem nós.

O que eles significam? Apesar de informações recolhidas por cronistas espanhóis, o mistério não foi revelado até 1912, quando o americano Leland Locke descreveu um quipo do Museu de História Natural de Nova York *(ver figura na pág. 23)*.

Por causa dos escritos deixados por de la Vega, Locke sabia que o valor dos números codificados pelos nós dependia de sua posição ao redor das cordas. Cada uma normalmente continha três grupos de nós: um inferior, que ele interpretou como o das unidades; um central, para as dezenas; e um próximo à corda principal, para as centenas. Suas hipóteses foram confirmadas quando ele percebeu que cada grupo de cordas pendentes era enlaçado por uma corda superior cujo valor indicado correspondia à soma das outras.

Três Tipos de Nó

DESSE MODO, a representação dos números sobre os quipos é similar ao nosso sistema de posição de base 10, no qual dispomos de dez símbolos distintos, os algarismos de 0 a 9. Em um número como 6.489, cada algarismo corresponde à quantidade de uma potência *n* de 10, *n* variando de 0, à direita, e aumentando em 1 cada vez que se passa uma casa à esquerda. Por exemplo, 6.489 é igual a 6.000+400+80+9, ou $6x10^3+4x10^2+8x10^1+9x10^0$. Notemos que há sistemas posicionais que não são ligados à base 10. Por exemplo, os maias *(ver artigos nas págs. 8 e 14)* contavam em sistema vigesimal, isto é, em base 20, e utilizavam também um sistema posicional.

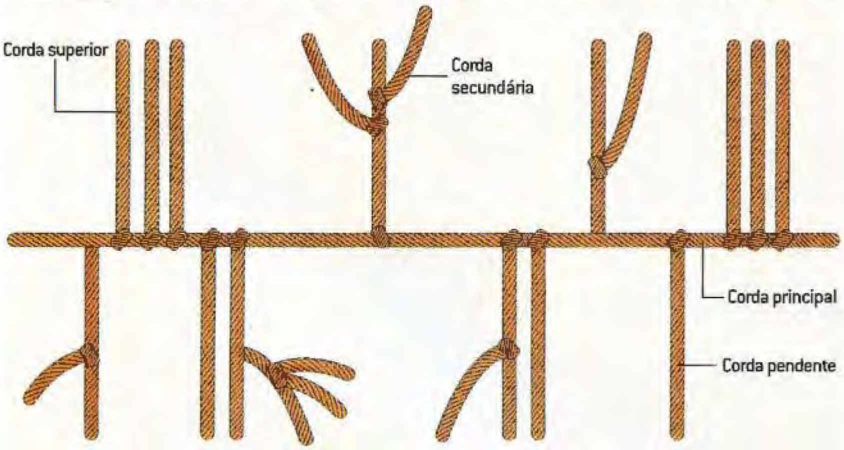
As cordas podiam conter três tipos de nó *(ver ilustração na pág. 23)*: o simples, o longo (um simples pelo qual se davam diversas voltas antes de atá-lo) e o nó em oito. Em uma corda, os nós eram repartidos em grupos de um a nove nós (encontramos nossos nove algarismos, exceto o zero), cada grupo sujeito a uma potência de 10, crescente à medida que se aproxima da corda principal.

Na maioria dos casos, as unidades eram registradas por nós longos, nos quais o número de voltas indicava o número de unidades, enquanto as outras potências de 10 eram marcadas por nós simples. No entanto, quando há apenas uma unidade, aparece um nó em oito, já que o nó longo com uma única volta é um nó simples.

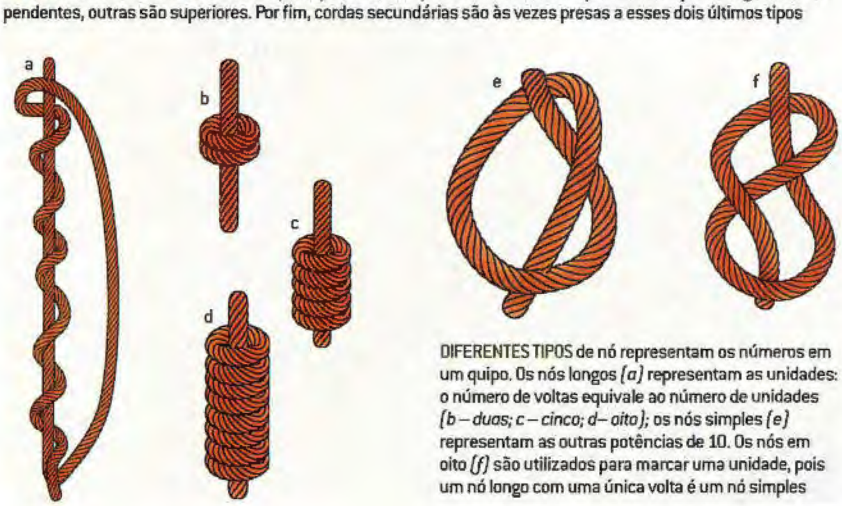
Nas cordas, o zero é indicado pela ausência de nós em um grupo. As unidades são facilmente identificadas pelo tipo de nó, e os grupos são alinhados na mesma posição em todas as cordas, de modo que é fácil reparar as posições desprovidas de nós. Além disso, como não há ambigüidade para as unidades, às vezes percebem-se diversos números indicados sobre uma mesma corda.

Conteúdo "Extranumérico"

ESTA DECIFRAÇÃO se limita ao aspecto numérico dos quipos e jamais foi contestada. Por outro lado, e a expressão de idéias e fatos? O debate está longe de encerrado. Novamente, os cronistas, de la Vega à frente dos quais, fornecem algumas indicações. Segundo o historiador mestiço, podemos conhecer o significado extranumérico das cordas graças às cores – alguns



UM QUIPO é constituído de uma corda principal, onde são presas cordas laterais por nós reforçados. Algumas são pendentes, outras são superiores. Por fim, cordas secundárias são às vezes presas a esses dois últimos tipos



DIFERENTES TIPOS de nó representam os números em um quipo. Os nós longos *(a)* representam as unidades: o número de voltas equivale ao número de unidades *(b – duas; c – cinco; d – oito)*; os nós simples *(e)* representam as outras potências de 10. Os nós em oito *(f)* são utilizados para marcar uma unidade, pois um nó longo com uma única volta é um nó simples fios eram de uma única cor, outros de duas, de três ou mais. As cores simples e as combinações teriam, cada uma, seu próprio significado.

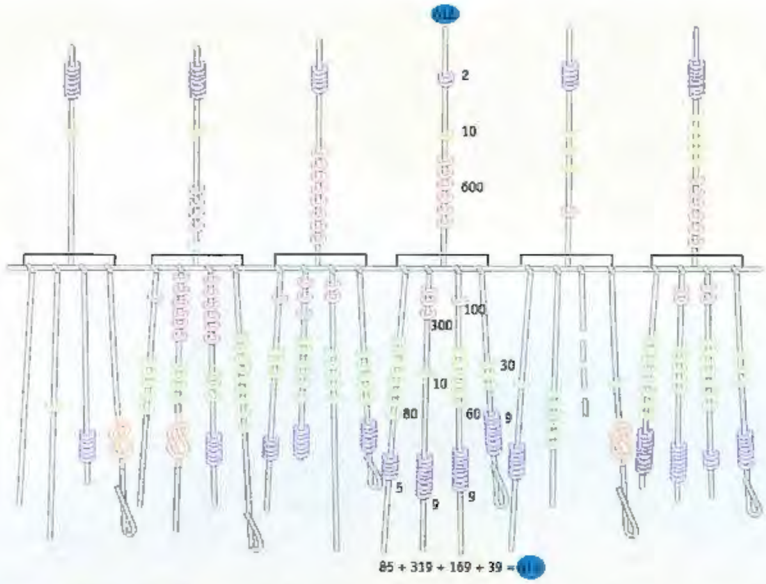
Em alguns quipos, identificou-se a expressão do recurso armamentista de um grupo, em que a combinação de cores indica de modo hierárquico as armas: na primeira corda, as mais nobres, como as lanças, na segunda, os dardos, e depois os arcos, as flechas, os maços, os machados e as fundas.

O sentido da torção dos fios da corda teria igualmente um significado. Giro para a direita representaria coisas positivas, enquanto aqueles virados para a esquerda, coisas negativas. Tal sentido oculto na confecção resolveria o mistério da ausência de escrita: como uma civilização altamente elaborada – que estendia seu poder sobre um território na atual região do Peru, da Bolívia, do Equador e do norte do Chile e da Argentina – pôde se privar de escrita? É como imaginar os gregos sem língua.

Gary Urton, da Universidade Harvard, sugere uma linguagem em código binário transcrita nas cordas dos quipos. Seria um sistema completamente inédito – ainda sujeito a debate – e radicalmente diferente do nosso sistema de escrita. De acordo com Urton, cada um dos nós seria o resultado de uma sucessão de seis decisões (os arqueólogos do neolítico europeu falavam de cadeias operacionais). O nó deve ser feito de alpaca ou de lã? A corda aponta para cima ou para baixo? No que concerne às cores, Urton utiliza a terminologia e o simbolismo das 24 tonalidades ainda em uso pelos tecelões bolivianos.

No total, o antropólogo distinguiu seis decisões binárias e uma de escolha múltipla (a cor). Por fim, o repertório de um quipo conteria 2^6x24 = 1.536 símbolos distintos de informação – maior que o da escrita cuneiforme da Mesopotâmia ou que o dos hieróglifos egípcios. Um quipo seria, portanto, mais que uma pró-memória.

Urton empenhou-se em informatizar todos os detalhes disponíveis e em tornar acessíveis esses dados a todos aqueles que desejassem se debruçar sobre o código.



O QUIPO QUE LELAND LOCKE estudou levou à descoberta da chave da numeração inca. Os incas contavam em base 10, segundo um sistema posicional. Os nós longos *(em roxo)* representam as unidades, nas extremidades dos cordões. Quando há apenas uma unidade, ela é marcada por um nó em oito *(em laranja)* para não confundi-la com os nós simples que marcavam as outras potências de 10 *(em verde, as dezenas; em vermelho, as centenas; em azul, os milhares)*. A cada uma delas corresponde um grupo de nós, e as potências de 10 aumentam da extremidade em direção à corda principal. Os números codificados nas cordas superiores são a soma dos números das cordas pendentes que elas cercavam

Em junho de 2003, Carrie Brezine, tecelã e matemática, trabalhou em transcrições de quipos encontrados um pouco antes em uma caverna próxima ao lago dos Condores, no norte do Peru. Longas séries de nós eram quase idênticas em três dos artefatos, mostrando que a informação era copiada de um a outro, do mesmo modo que os monges copistas da Idade Média reproduziam os manuscritos à mão.

O conteúdo extranumérico é defendido também por Laura Laurencich Minelli, da Universidade de Bolonha. Ela recentemente descreveu um manuscrito do século XVII, aparentemente de Joan Antonio Cumis e de Joan Anello Oliva, que conteria informações detalhadas sobre os "quipos literários". No documento dos dois jesuítas, estavam intercaladas três páginas de desenhos assinados "Blas Valera" e um envelope onde havia um fragmento de quipo.

Segundo Cumis, os quipos reais se distinguiam daqueles utilizados como pró-memória de contabilidade. No entanto, poucos teriam sobrevivido aos autos-de-fé dos espanhóis.

Sobre o modo como a língua quíchua era "escrita", por meio dos nós, Cumis aponta: "A raridade de palavras e de possibilidades de modificar um termo com partículas ou sufixos permitiu aos incas confeccionar um dicionário sem papel, nem tinta, nem caneta. (...) Meu interlocutor em seguida elaborou a lista das principais palavras bem como o modo de codificá-los em um quipo".

Talvez ainda estejamos longe de ler esses artefatos do mesmo modo que faziam os *quipucamayocs*. Até agora, só as regras numéricas foram decifradas com certeza, e resta elucidar o mistério das combinações de símbolos, cores e posições. SA

***Loïc Mangin** é redator-chefe-adjunto de* Pour la Science, *edição francesa da revista* Scientific American.

PARA CONHECER MAIS

Cracking the Khipu Code. Charles Mann em *Science*, vol. 300, nº 5.626, págs. 1.650-1.651, 2003.

Mathematics of the Incas: Code of the Quipu. Marcia e Robert Ascher. Dover Edition, 1997.

A matemática provisória da astronomia chinesa

Por Jean-Claude Martzloff

Os chineses pensavam que a matemática não podia, por essência, representar corretamente um mundo que evoluía de modo imperceptível. Para se adaptar, eles reformavam periodicamente suas teorias do movimento dos astros

A maior parte das grandes civilizações antigas usava seu conhecimento em matemática para criar calendários, prever fenômenos astronômicos e explicar o Universo.

Se as aplicações da matemática não foram as mesmas em todo lugar, os objetivos eram os mesmos: foi dominante o desejo universal de organizar a vida social, econômica e religiosa pela separação matemática do tempo em dias, meses e anos. Em todo lugar, a sede de conhecimento do futuro estimulou uma série de procedimentos matemáticos destinados à definição de horóscopos e efemérides planetárias. Esse frenesi levou a desenvolvimentos matemáticos autóctones e a trocas matemáticas de grande amplidão.

A globalização das idéias matemáticas não data de ontem. A matemática da China se expandiu para Coréia, Vietnã e Japão *(ver figura 1)*, regiões onde a língua chinesa exercia o mesmo papel que o latim tinha na Europa. As fronteiras não eram definidas. Astrônomos e matemáticos indianos foram empregados do escritório de astronomia oficial chinês, sob a dinastia Tang (618-907). Em cerca de 1380, um conjunto completo de tabelas astronômicas árabes foi traduzido para o chinês. Por fim, a partir de 1644 os chineses efetuaram seus cálculos astronômicos empregando técnicas matemáticas européias recentes

1. ESFERA CELESTE DE ORIGEM CHINESA de 1680, em representação plana. Extraída da obra japonesa *Juji hatsumei*, de Seki Takakazu (cerca de 1642-1708). Os pequenos triângulos *(em rosa)* indicam quantidades expressas em centésimos (1 grau é igual a 100 minutos, e 1 minuto a 100 segundos). As linhas descontínuas *(em azul)* assinalam as quantidades que dependem de parâmetros ligados ao equador e à eclíptica. Essa representação plana da esfera celeste – inabitual – traduz um sistema de cálculo que exerce o papel da trigonometria esférica, mas que não é fundado sobre noções usuais de trigonometria. Resulta da combinação de fórmulas aproximadas com fórmulas exatas

(ver figura 3), incluindo as de Kepler e as de Newton. Esse conhecimento foi ensinado por missionários jesuítas que haviam chegado à China a partir do fim do século XVI.

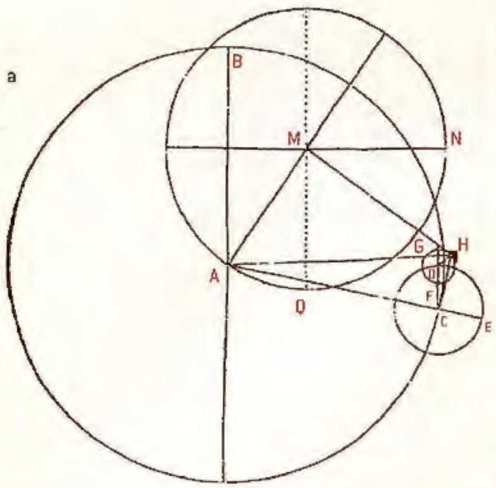
Apesar da importância das trocas, as explicações matemáticas do Universo que as grandes civilizações da Antigüidade e da Idade Média propuseram diferiam sensivelmente. Por exemplo, durante a dinastia Han (206-220) os chineses pensavam que a Terra era plana e conduziram cálculos baseados no teorema de Pitágoras e na similaridade de triângulos retângulos para calcular a distância da Terra ao Sol. Depois dessa dinastia, os astrônomos chineses abordaram pouco as questões cosmológicas e, quando o faziam, era sempre sem matemática, à maneira daqueles que pensavam que o céu era redondo e a Terra quadrada. Alguns acreditavam que o Universo parecia um ovo, em que a Terra seria a gema, e outros preferiam a imagem de uma tigela emborcada sobre a imensidão do oceano. Julgando a estrutura do Universo inacessível ao entendimento humano, os chineses elaboraram uma matemática para a astronomia fora da cosmologia, o que difere consideravelmente da visão européia.

Confiança na Matemática

Na europa, o conhecimento da realidade do mundo com base em cosmológicos regentes pela matemática sempre teve uma importância que nunca foi desmentida. Primeiramente, o astrônomo grego Ptolomeu localizou a Terra no centro de tudo *(ver figura 4)* e astros girantes ao redor do planeta, su-


2. O IMPERADOR KANGXI, o "Luís XIV chinês" (reinou de 1622 a 1723), em traje de ostentação, no fim de sua vida. Essa roupa evoca a riqueza e a pompa real, mas também carrega um simbolismo ligado à astronomia: o colar do imperador é constituído de 72 pérolas, das quais quatro simbolizam os solstícios e equinócios, enquanto as outras 68 representam o número de períodos de cinco ou seis dias nos quais o ano solar se divide no calendário lunissolar chinês tradicional (nesse calendário, o ano solar é definido pelo tempo que separa dois solstícios de inverno consecutivos). Assim, o imperador é não somente o soberano do território chinês mas também se sagra soberano do tempo, por meio do calendário e, mais geralmente, por meio do embargo à astrologia política, cujos signos supostamente influíam no destino dos reinos e dos impérios, e não sobre indivíduos isolados

a



b

3. TRECHO DE *ASTRONOMIA DANICA (Astronomia dinamarquesa)*, do astrônomo Christian Severin *(a)*, discípulo de Tycho Brahe, mostra que os movimentos do planeta Marte são, no século XVII, estudados com o uso de combinações de círculos, como na Antigüidade e na Idade Média. O movimento de Marte *(H)* ao redor do Sol *(A)* é descrito com a ajuda de dois epiciclos, isto é, dois pequenos círculos. O primeiro é o círculo cujo centro *(C)* está situado no grande círculo, e o segundo, de centro D, está situado no círculo precedente. O ponto M representa a Terra, ao redor da qual se movimentaria o Sol. Publicada em 1622, o *Astronomia danica* foi adaptado para o chinês *(b)* em cerca de 1628, pouco tempo após sua publicação. A figura chinesa é a mesma, salvo que as letras foram substituídas por caracteres da escrita local. O texto é uma tradução das explicações acima

jeitando à matemática o modelo geométrico do Universo assim concebido.

Essa idéia, que influenciou por longo tempo o Islã e a Europa, combinou-se com a teoria anterior de Aristóteles sobre a imutabilidade do céu e deu força à concepção de leis da Natureza fixas e de tipo matemático. Quando Copérnico inverteu a antiga concepção geocêntrica ao situar o Sol no centro do mundo, a idéia de Ptolomeu foi abandonada, após forte resistência. A idéia da submissão do Universo a leis matemáticas, contudo, continuava a reinar.

"O Universo é escrito em linguagem matemática", dizia Galileu, e aprender essa linguagem permite compreender tudo. Essa convicção triunfou nos séculos XVIII e XIX, com as leis da gravitação universal e da mecânica celeste de Newton. Com as idéias do inglês, o matemático Pierre Simon de Laplace pretendia conhecer teoricamente o estado do Universo em um momento qualquer do passado ou do futuro pela autoridade única da matemática. Assim, a partir da Antigüidade, o desenvolvimento da astronomia matemática fundada sobre a tradição grega se desdobrou para descobrir a verdade matemática absoluta, que daria acesso ao conhecimento tanto do estado futuro como do passado dos maiores corpos celestes e dos corpúsculos mais ínfimos.

REGIOMONTANUS, OPERA COLLECTANEA, OSNABRÜCK, O. ZELLER VERLAG, 1972, P. 62

Os chineses também utilizaram a matemática como instrumento de análise racional para prever fenômenos astronômicos que não lhes pareciam irregulares, como as posições do Sol, da Lua e dos planetas, as fases da Lua, os eclipses *(ver figura 5)* e outros fenômenos. No entanto, eles jamais consideraram a matemática suficiente para realizar previsões infalíveis. Ao contrário, pensavam que todo sistema de astronomia matemática preditiva era por princípio limitado e deveria necessariamente ser "aposentado" após certo período de tempo.

Os chineses persuadiram-se disso pouco a pouco, percebendo, a partir de meados do século II a.C., que sua matemática preditiva não conseguia sempre calcular corretamente as datas de fenômenos astronômicos regulares, seja aqueles que ainda não tinham acontecido, ou aqueles cujas datas já estavam registradas nos antigos anais.

4. CLÁUDIO PTOLOMEU *(embaixo, à esquerda)* sob seu sistema de mundo no qual a Terra está no centro do Universo. Essa figura está no início do *Epítomo de Almagesto*, do astrônomo alemão Regiomontanus *(representado embaixo, à direita)*

Assim, nem sempre eles conseguiam prever os fenômenos celestes ou calculá-los retroativamente. Para tanto, eles se empenhavam em melhorar seus sistemas de predição: o poder imperial favoreceu as pesquisas ao conceder-lhes bons recursos financeiros e ligando-as a serviços permanentes de equipes competentes durante séculos.

O império chinês via na astrologia um meio de governo, graças ao conhecimento do futuro que ela pretendia fornecer. Como a astronomia e a matemática podiam ajudar a astrologia, elas foram objeto de uma atenção particular. Devido à idéia da ressonância recíproca entre o céu e a Terra por intermédio da figura do imperador *(ver figura 2)*, eventos teatrais anunciavam o que poderia no futuro acontecer de fasto e, sobretudo, de nefasto. Por exemplo, inundações ou revoltas campesinas eram sinais de uma troca iminente de dinastia. A intenção era a de que o imperador pudesse mudar o curso do futuro alterando sua política, se conseguisse um meio de saber sobre tais eventos antecipadamente.

O poder imperial criou então um escritório de astronomia oficial cujas predições guiaram a política como se fossem as pesquisas de opinião atuais. Astrônomos e matemáticos foram recrutados e encarregados de observar o céu, de construir instrumentos de medida do tempo e de observação, de anotar suas investigações e de elaborar sistemas de astronomia matemática preditiva.

Competições Astronômicas

A FIM DE AUMENTAR as chances de êxito, foram organizadas competições entre sistemas rivais de astronomia matemática. Por exemplo, no *Yuanshi*, o tratado de cálculos astronômicos reproduzidos nos anais da dinastia mongol de Yuan (1277-1367), encontra-se uma avaliação estatística comparativa da capacidade de seis sistemas de cálculo. Cada um deveria encontrar as datas, consignadas nos anais chineses da Antigüidade, de 49 solstícios de inverno ocorridos desde o período das primaveras e dos outonos (722 a.C. - 481 a.C.) até o ano 1280 – distribuídos num intervalo de mais de 2 mil anos. O sistema adotado sob a dinastia Yuan calcula a data correta em 39 casos e falha em 10. O modelo escolhido era o melhor sem ser perfeito, pois seus cálculos não eram sempre bem-sucedidos.

A superioridade do sistema escolhido era questionada com freqüência: isso porque seu poder preditivo, especialmente sua capacidade de prever eclipses da Lua e do Sol, degradava-se. O sistema de Yuan, promulgado em 1280, foi eliminado em 1368, menos de um século mais tarde, após uma nova competição, organizada pela dinastia seguinte, a Ming (1368-1644). O novo sistema foi julgado temporariamente melhor, mas sucumbiu em 1644, depois de ter sido posto em disputa com duas outras técnicas de cálculo, uma utilizando tabelas astronômicas árabes e a outra, européias.

Os exemplos precedentes são tardios, pois o mais antigo data apenas do final do século XIII. Eles são, no entanto, representativos de uma situação que remonta à primeira reforma da astronomia matemática chinesa, promulgada em 104 a.C. Desde essa época até 1911, isto é, até a queda do regime imperial, os chineses reformaram suas técnicas de astronomia matemática 50 vezes (em média uma reforma a cada 40 anos). A cada vez, as reformas eram selecionadas em competições entre sistemas rivais.

O CALENDÁRIO CHINÊS

OS MAIS ANTIGOS calendários chineses que chegaram a nós datam dos dois primeiros séculos antes do início da era cristã; são gravados sobre fichas de bambu ou pranchetas de madeira. Cinqüenta outros são manuscritos ou impressos em papel; remontam aos séculos IX e X. As origens do calendário chinês são, no entanto, muito mais antigas e remontam ao reinado arcaico dos Shang (1600 a.C.-1100 a.C.), quando os chineses começaram a contar os dias ciclicamente por grupos de 60, número resultante da ordenação simultânea de duas séries de símbolos, uma de 10 signos (os 10 troncos) e outra de 12 (os 12 galhos), associadas aos 12 animais (rato, boi, tigre etc.), a partir do século VIII. Ao longo do milênio seguinte, esse sistema de numeração foi gradualmente enriquecido de uma representação lunissolar empírica do tempo, baseada também em um ano solar (o ano das estações) e em um ano lunar de 12 meses de 29 ou 30 dias sincronizados com o Sol graças à inserção ocasional de um 13º mês lunar (um mês intercalar). A partir de 104 a.C., o calendário se tornou monopólio do Estado e começou a depender de cálculos matemáticos constantemente reformados: os mais antigos dependeram de toda sorte de ciclos lunissolares (por exemplo, um ciclo composto de 391 anos com 144 meses intercalares), mas o mais comum envolve cálculos cuja complexidade freqüentemente excede o entendimento. O calendário chinês possui uma estrutura muito irregular: de um ano a outro, é impossível determinar sem cálculo a duração dos meses lunares, sua repartição, o momento do eventual mês intercalar. É o mesmo no caso das luas cheias no dia 14, 15 ou 16 do mês e do início do ano lunar, cuja data oscila entre 21 de janeiro e 20 de fevereiro.

IMAGEM POPULAR de um calendário chinês simplificado de 1897

Essas reformas ininterruptas, cujo número elevado contrasta com o conservadorismo europeu, simbolizado pela manutenção do sistema de Ptolomeu durante 1.500 anos, testemunham uma extraordinária abertura da China à mudança em matéria de astronomia matemática. De fato, nas fontes astronômicas chinesas, a palavra mais comum encontrada em todas as épocas é a da novidade (xin, em chinês). Como falar então, como fazem muitos autores ocidentais, da imobilidade da China?

Ainda que tivessem estimado que seus sistemas de astronomia preditiva tinham data de validade, os chineses tentaram, sem cessar, melhorá-los. A precisão das previsões se aprimorou ao longo da história, e a matemática correspondente se tornou mais e mais elaborada.

Sob a dinastia Han e a dos Três Reinos (222-265), os chineses usavam movimentos uniformes para calcular a posição do Sol, da Lua e dos planetas. Por exemplo, pensava-se que a longitude do Sol aumentava uniformemente 1 grau por dia, de modo que, ao final de um ano, teriam sido percorridos tantos graus quanto fosse o número de dias do ano. Eles admitiam igualmente o ciclo lunissolar *(ver quadro acima)* – segundo o qual 19 anos trópicos (o período que separa o retorno do Sol à mesma altura) correspondem a 235 meses lunares sinódicos (a revolução sinódica da Lua corresponde à lunação) – e utilizavam ciclos periódicos para prever os eclipses da Lua e do Sol. Segundo um desses ciclos, estimavam-se 23 eclipses lunares ou solares em 135 meses, ou pelo menos um a cada seis meses.

Os resultados não eram bons, e eles lançaram sucessivos programas de observação para compreender melhor os fenômenos astronômicos. Em 722 e 723, uma expedição percorreu a China de norte a sul, até o Viemã, a fim de mensurar as variações de sombras solares segundo a latitude. Eles tentaram também melhorar a medida do tempo aperfeiçoando a clepsidra e introduzindo um mecanismo de escape no relógio de água.

Em 1280, servindo-se de uma espécie de câmara escura, chegou-se à medição precisa da sombra de um gnômon (lâmina de relógio de sol) com 12 metros de altura e deduziu-se o instante do solstício de inverno com uma precisão de meia hora. Assim, eles puderam melhorar os valores de seus parâmetros astronômicos e, a partir daí, refinar suas previsões matemáticas.

Do início da era cristã até o começo do século VII, os chineses refinaram seu ciclo lunissolar, substituindo os valores de 19 anos e 235 meses por 391 anos e 4.836 meses ou 600 anos e 7.421 meses, respectivamente. Durante o mesmo período, eles constataram também que os movimentos da Lua e do Sol não podiam ser considerados uniformes. Da mesma forma, elaboraram tabelas astronômicas para apontar as desigualdades solares e lunares. Para os eclipses, abandonaram o sistema de ciclos periódicos e basearam os cálculos em técnicas mais elaboradas, geométricas, similares às da astronomia matemática grega. Calcularam assim o instante do primeiro e do último contato e do máximo do eclipse, bem como sua grandeza.

Para as conversões recíprocas de coordenadas celestes (por exemplo, a conversão das coordenadas equatoriais de uma estrela em suas coordenadas elípticas ou a conversão inversa), eles utilizaram episodicamente métodos trigonométricos de origem grega que haviam aprendido por intermédio dos indianos, dos povos islâmicos da Ásia central e dos europeus. No entanto, com maior freqüência remetia-se a fórmulas próprias.

Graças a esse arsenal, os chineses melhoraram sensivelmente a precisão de suas técnicas preditivas, sem jamais conseguir evitar por completo os erros, como um eclipse previsto mas não observado. Também não conseguiram diminuir suficientemente os erros de previsão da posição dos planetas. Em cerca de 1600, esses erros atingiram cerca de um mês de diferença entre as datas das posições previstas e as observadas de fato. Essa margem é similar à verificada na Europa na mesma época.

Apesar do aumento da precisão de suas observações astronômicas, os métodos matemáticos preditivos dos chineses não eram infalíveis. Para eles, isso se atribuía à limitação dessa ciência: consideravam um absurdo a afirmação de Galileu, segundo a qual o mundo seria escrito em linguagem matemática, e diziam que leis naturais de tipo matemático não poderiam existir.

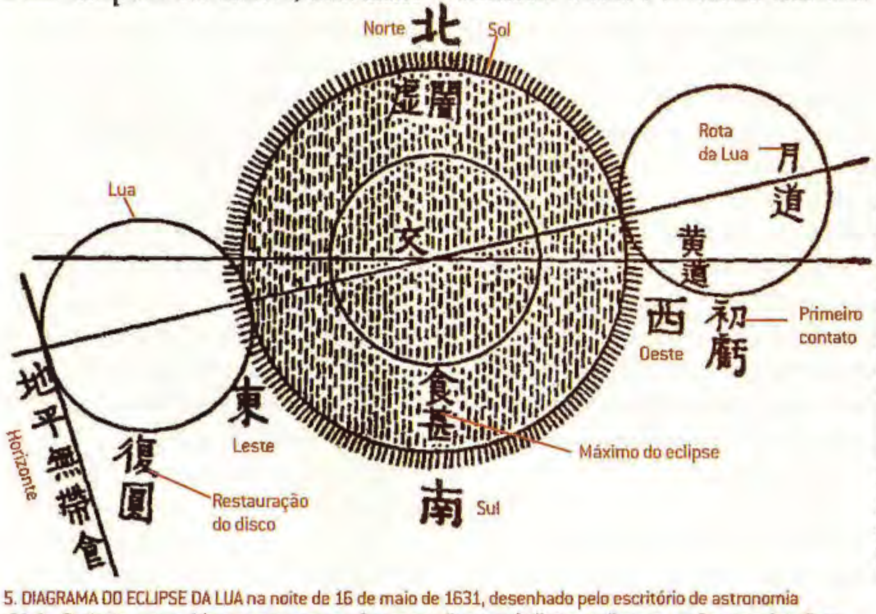
Limites da Matemática

O ASTRÔNOMO YIXING (683-727) pensava que havia matemáticas falsas que davam resultados válidos e verdadeira com resultados incorretos. No primeiro caso, era uma questão de sorte; no segundo, as regularidades aparentes da Natureza poderiam se desarranjar subitamente. Assim, não bastava que um sistema de astronomia estivesse correto, isto é, em conformidade com os dados experimentais, para que se tivesse certeza da exatidão das previsões efetuadas.

Outros pensavam que era impossível traduzir perfeitamente as observações astronômicas com o uso da matemática, pois toda observação, por mais precisa que fosse, deixava necessariamente um erro que não poderia jamais ser nulo. Por exemplo, quando um instrumento de observação é dividido em graus, pode-se dividi-lo em décimos de graus ou algo mais, mas há sempre um limite e, conseqüentemente, um erro residual que pode se amplificar, como nos sistemas sensíveis às condições naturais. Além disso, diziam, os instrumentos de observação são sempre pequenos demais com relação à imensidade do céu.

Contudo, todos admitiam que as observações astronômicas com base nas quais os matemáticos imaginavam técnicas de previsão dos fenômenos podiam ser aplicadas apenas a intervalos de tempo extremamente curtos, considerando-se a infinidade do tempo, passado ou futuro. Mesmo conservando arquivos de observação antigos e modernos durante milênios, obtinha-se apenas um conhecimento restrito do comportamento dos corpos celestes: para entender com certeza os fenômenos, as observações deveriam estender-se por milhões de anos.

Assim, para os chineses, não poderíamos deduzir leis gerais, válidas o tempo todo, a partir do conhecimento particular do céu, relativo a intervalos de tempo curtos, no escopo da dupla infinidade do tempo: o passado e o futuro. Nos seus cálculos, os chineses lidavam habitualmente com intervalos de tempo de milhões de anos. Deduziram que sua matemática preditiva poderia dar bons resultados, mas na melhor das hipóteses de maneira limitada. Na prática, estimavam que, depois de 300 anos, sua matemática perecia. Era necessário, então, modificá-la ou adotar outra.



WANG CHONGMIN (ED.), XU GUANGQI JI [ŒUVRES CHOISIES DE XU GUANGQI] VOL. 2

5. DIAGRAMA DO ECLIPSE DA LUA na noite de 16 de maio de 1631, desenhado pelo escritório de astronomia chinês. Os documentos chineses que acompanham esse diagrama indicam os diversos parâmetros do eclipse, notadamente a entrada da Lua na penumbra *(à direita)*, ao mesmo tempo segundo métodos de cálculo de previsões da astronomia chinesa e da astronomia européia (tabelas adaptadas ao chinês a partir da astronomia de Tycho Brahe, levadas por missionários jesuítas europeus no fim do século XVI). O eclipse começou à 0h30 de Pequim e durou uma hora e 40 minutos. Os cálculos chineses e europeus previram o início e o fim do eclipse com pouco menos de 45 minutos de atraso. Neste exemplo, os cálculos europeus não são melhores que os cálculos chineses, mas o são na maior parte dos outros casos. Por isso os chineses, a partir de 1644, passaram a reformar sua astronomia baseando-se em tabelas astronômicas européias, como as *Tabelas rudolfinas*, de Kepler

Os astrônomos chineses da Idade Média consideravam os fenômenos astronômicos naturais como passíveis de mudanças ínfimas, mas cumulativas: crê-se que tudo é fixo, enquanto ao longo do tempo tudo acaba por mudar. Por exemplo, para eles, as estrelas, fixas de acordo com os astrônomos da tradição grega, eram obrigatoriamente submetidas a pequenas mudanças de posição percebidas somente a longo prazo. Isso porque, mesmo se as observações feitas em um determinado instante forem exatas, não é nunca certo que elas permanecerão assim quando comparadas a observações anteriores ou posteriores. Os resultados fixos de observações pontuais que os matemáticos traduzem em fórmulas condensadas tropeçam em mudanças imperceptíveis, mas inelutáveis, do Universo.

6. O PLANISFÉRIO CELESTE DE SUZHOU mede 85 cm de diâmetro e foi gravado sobre um monumento em 1506. Chamado de *Tianwen tu [Carta dos desenhos do céu]*, lê-se nele o céu visível na China central. Percebe-se aí a Via Láctea e a divisão do céu em 28 setores, de tamanhos desiguais, determinando os limites das 28 constelações chinesas *xiu* [alqueire, boi, servente, vazio, teto, casa etc.]. Os limites dessas constelações são representados por linhas saídas do pólo celeste. As estrelas são representadas por pontos, alguns mais fortes que outros, segundo a luminosidade das estrelas; certas estrelas são unidas por linhas e constituem constelações. A carta conta com 1.464 estrelas no total; como comparação, eram 1.022 no *Almagesto* de Ptolomeu

Para avaliar o fenômeno, os chineses consideravam que o valor médio do ano trópico era sujeito a variações, positivas para o passado e negativas para o futuro, de um décimo de milésimo de dia por século, no sistema de cálculo astronômico da dinastia mongol Yuan, utilizado de 1280 a 1368. Em 1280, o ano trópico valia 365,2524 dias, mas 365,2523 dias 100 anos mais tarde, 365,2525 dias 100 anos mais cedo e 365,2426 dias 200 anos mais cedo. O valor atual desse ano médio é de 365,2522 dias.

Essa variação secular dos parâmetros astronômicos fundamentais foi confirmada cinco séculos mais tarde por Laplace, com a obliqüidade da eclíptica, isto é, o ângulo entre o equador celeste (a intersecção do plano do equador terrestre com a esfera celeste) e o eclíptico, o plano onde a Terra efetua seu movimento ao redor do Sol. Laplace se fundou em observações antigas, chinesas, gregas e árabes, para sustentar seu resultado.

No entanto, os sucessores dos astrônomos da época mongol consideraram a fórmula das variações seculares inútil, pois obtinham os mesmos resultados sem ela, com pequena diferença. Contudo, não abandonaram a idéia das variações celestes infinitesimais e continuaram a pensar que o céu se desarranja imperceptivelmente e que a matemática, por sua rigidez, não poderia traduzir esse desarranjo.

Como mostrou o sinólogo americano Benjamin Elman, em 2000, a questão da limitação da matemática preditiva foi julgada tão importante na China que era considerada mesmo nos concursos de recrutamento de funcionários.

Concepções Diferentes

Comparado às concepções chinesas, o tempo da Europa medieval estava fechado nos limites estreitos definidos pelo dogma cristão da criação: segundo a Bíblia, a criação do mundo remonta a pouco mais de 4 mil anos a. C. O mundo europeu medieval era também limitado no espaço: as estrelas fixas se situavam a uma distância da ordem de uma dezena de vezes a da Terra ao Sol.

Em tal mundo, limitado no tempo e no espaço, a existência de leis é plausível, pois tudo parece estável. A partir do século XVII, os europeus compararam o mundo a um relógio perfeito, regular, inalterável e, portanto, sobre-humano. Por outro lado, os chineses viam o Universo como um relógio que ora avançaria, ora atrasaria e depois não mais funcionaria. Como os relógios, a matemática preditiva podia ser "reparada", corrigida, mas às vezes não. Esse tipo de apreciação foi sem cessar repetido durante toda a história da China imperial, até 1911.

Como os antigos chineses, os matemáticos do século XX estabeleceram limites ao poder da matemática. Gödel (1906-1978) para a lógica, Poincaré (1854-1912) para os sistemas dinâmicos, e muitos outros chegaram a essa conclusão a partir de deduções matemáticas. Por outro lado, os chineses desde o começo pensavam que a matemática, por princípio, era limitada. Em conseqüência lógica de seu raciocínio, os europeus concluíram que deveriam pôr água no vinho, enquanto os chineses pensavam que sempre houve água no vinho.

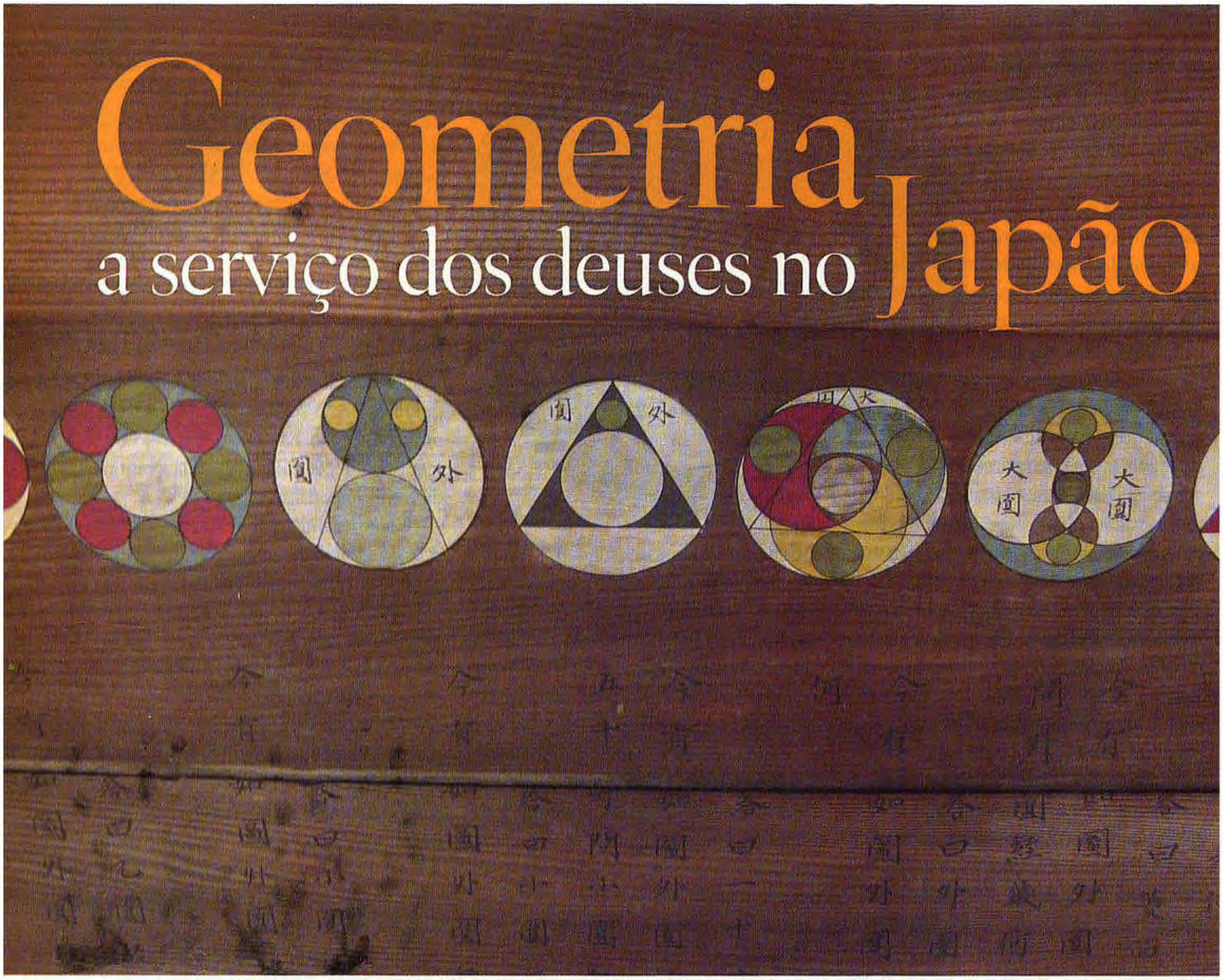
Para os chineses especializados em cálculos astronômicos, a matemática não representava a verdade física na sua perfeição divina, mas era apenas um instrumento temporário e aproximativo. Isso porque sempre viram sua previsão astronômica um pouco como nós vemos a previsão meteorológica. Eles então sempre reformaram seus sistemas de cálculo astronômico, persuadidos da complexidade inerente à Natureza, enquanto os europeus sonharam em reduzi-la a leis simples e definitivas e em encontrar sua verdade última. SA

Jean-Claude Martzloff *é diretor de pesquisa do Centro de Pesquisas sobre a Civilização Chinesa, no CNRS (Centro Nacional de Pesquisa Científica da França).*

PARA CONHECER MAIS

Le calendrier chinois. J.-C. Martzloff, em *Aperçus de la civilisation chinoise.* Desclée de Brower, Paris, 2003.

Geometria a serviço dos deuses no Japão



Por Annick Horiuchi

As tabuletas que propõem questões matemáticas penduradas em alpendres de templos aos poucos tiveram sua função religiosa substituída por preocupações ligadas a propaganda e a demonstrações de força

Hoje em dia, uma pessoa que caminhe atenta pelas ruas das pequenas cidades do Japão pode ainda descobrir, discretamente penduradas nos alpendres dos templos budistas ou dos santuários do xintoísmo gravuras com figuras geométricas conhecidas como sangaku ou tabuletas matemáticas *(ver figura na pág. ao lado)*, conservadas às centenas através do arquipélago: segundo as últimas estimativas, seriam 813.

Essas tabuletas visíveis em nossos dias são em sua maioria do seculo XIX, mas sabe-se que a prática já era corrente em meados do século XVII. Estima-se que na época dos xoguns de Tokugawa (período feudal entre 1603 e 1868), elas tenham sido produzidas aos milhares, mas a maior parte desapareceu sem deixar marcas.

O conteúdo e a forma dos sangaku mudaram pouco desde a época em que surgiram: trata-se sempre de enunciados de problemas, propostos por um indivíduo, com ou sem a solução. Eles são relativamente sucintos e inspirados, na maioria dos casos, em composições geométricas complexas, nas quais quadrados, círculos e elipses (ou ainda esferas e cubos) se imbricam ou se cruzam harmoniosamente proporcionando um grande deleite visual.

Geometria Variável

AS SOLUÇÕES, quando eram oferecidas, resumiam-se a listas herméticas de operações, que nada deixavam transparecer sobre o raciocínio e o cálculo feito para chegar até elas. Os problemas dos sangaku eram de dificuldade variável. Alguns podiam ser resolvidos facilmente por meio de um cálculo algébrico simples; outros exigiam instrumentos de análise muito mais elaborados. Os mestres japoneses certamente tinham, no campo das figuras imbricadas, uma experiência muito rica que lhes permitia distinguir instantaneamente os problemas realmente difíceis das variantes de problemas conhecidos.

Por que os matemáticos escolheram um sítio religioso para pendurar as tabuletas? Elas pertenciam a uma categoria mais ampla de objetos, a dos *ema*, que significa literalmente "cavalos pintados". Desde o século VIII, os adeptos budistas ou xintoístas substituíram aos poucos as oferendas de animais vivos pela colocação de pranchetas nas quais estava representado esse animal sagrado *(ver figura na pág. 32)*. Ao longo do tempo, os *ema* se dissociaram da ligação com o animal para representar temas profanos como cenas de batalha ou personagens célebres. Contudo, as tabuletas conservaram uma finalidade religiosa já que eram penduradas à guisa de reconhecimento ou para solicitar a ajuda de Buda ou de algumas dos milhares de divindades xintoístas.

Mesmo essa função, no entanto, deixou de ser indispensável a partir dos séculos XV e XVI. Artistas novatos utilizaram esse suporte para se tomarem conhecidos. Sob o reinado dos xoguns Tokugawa, período que nos interessa aqui, admirar os "cavalos pintados" fazia parte da visita aos templos. Alguns desses locais eram dotados de galerias especialmente dedicadas a essas formas artísticas. Quanto mais célebre e freqüentado era o lugar, maior a quantidade de sangaku. Por exemplo, o templo de Asakusa, em Tóquio, conserva hoje 215 tabuletas, algumas das quais são consideradas obras de arte. Além disso, não é de admirar que jovens matemáticos, ambiciosos, mas sem condições, tenham usado esse recurso para ganharem notoriedade.

Com efeito, no início do século XVII, os matemáticos iam de vento em popa no arquipélago. O Japão estava na aurora do mais longo período de paz de sua história. Com a ajuda de obras importadas da China ou redescobertas nas prateleiras das bibliotecas, tradições científicas se construíam ou se reconstruíam sobre novas bases. Os matemáticos faziam parte desse grande movimento que lembra o da Renascença no Ocidente. As pesquisas matemáticas atingiram um pico nos últimos decênios do século XVII antes do surgimento do grande matemático Seki Kowa Takakazu (1642-1708) e de seu não menos brilhante discípulo Takebe Katahiro (1664-1739). É no campo das técnicas de resolução algébrica que os progressos são mais espetaculares. Com Takebe, os japoneses exploraram o terreno da análise infinitesimal. Esse interesse pela ciência do cálculo se traduziu por um crescimento das publicações nesse campo e pela multiplicação de "escolas" de matemática, para onde afluíam os amadores em busca de um ensino completo.

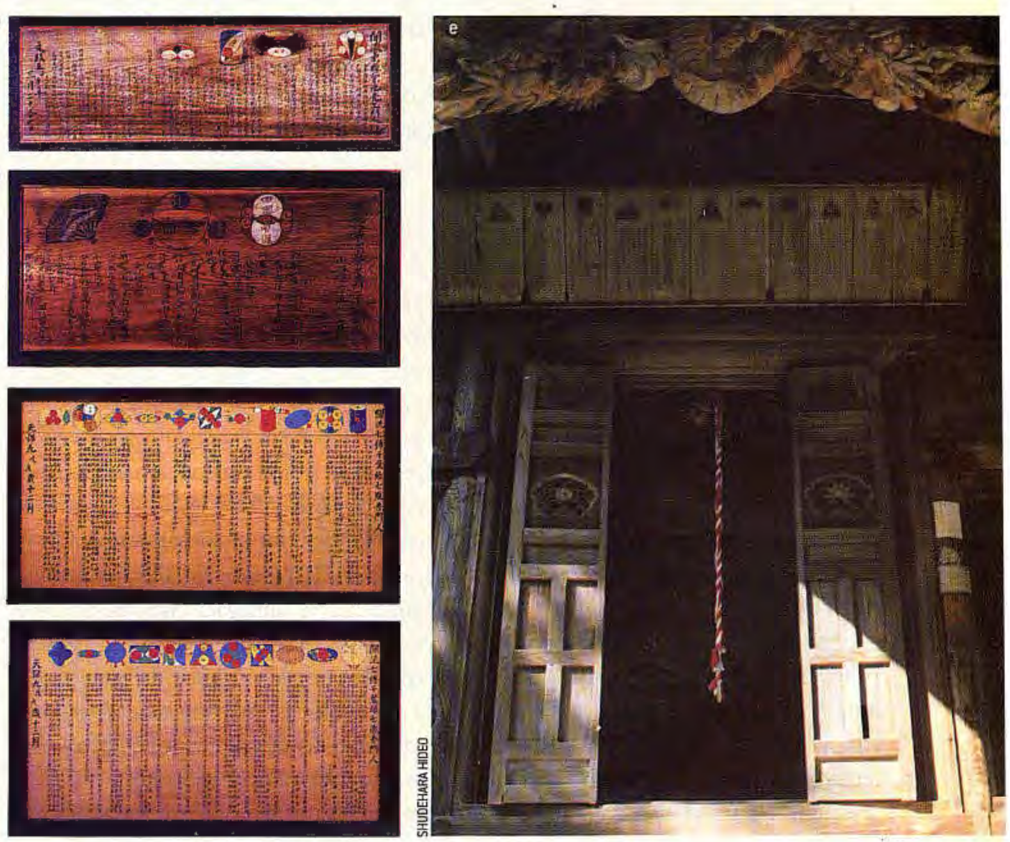
Nesses lugares, naquela época, não havia cursos coletivos. Os alunos eram com freqüência deixados sozinhos para resolver os problemas e o mestre se contentava em fornecer a cada um algumas pistas para reflexão. No entanto, o laço que unia o aluno a sua escola era bem mais forte e mais exclusivo que atualmente. Uma das razões era que cada colégio cuidava com certo ciúme de seu conjunto de conhecimentos e só o revelava em conta-gotas e aos mais merecedores. Assim, os métodos de resolu-

a

b

c

d



e

SHUDEHARA HIDEO

1. NO JAPÃO, numerosos lugares de peregrinação xintoístas e budistas abrigam tabuletas matemáticas, chamadas de sangaku, onde estão registrados problemas quase sempre geométricos Por exemplo, na prefeitura de Iwate, o santuário de Namiwake (*a*, as tabuletas são datadas de 1822 e *b*) e o santuário de Ichinoseki Hachiman (*c* e *d*, de 1838) abrigam vários dessas tabuletas. É também o caso, na prefeitura de Fukushima, da entrada do santuário de Hiwatari (*e*, de 1888)

2. OS *EMA*, ou "cavalos pintados", são objetos que substituíram os sacrifícios de animais como oferendas a partir do século VIII. As tabuletas de matemática constituem uma categoria desses "cavalos pintados"

3. RETRATO DE Aida Yasuaki, aos 70 anos de idade. Quando mais jovem, ele era um samurai ambicioso, mas sem dinheiro. Adquiriu celebridade graças a uma tabuleta de matemática depositada em um santuário

ção mais elaborados eram reservados a um círculo muito pequeno de discípulos. Só aqueles que conseguiam chegar a um nível de conhecimento equivalente ou superior ao do mestre podiam por sua vez abrir uma escola, e apenas um entre eles sucedia o mestre no comando da escola.

Na capital Edo, antigo nome de Tóquio, a chamada escola de Seki desfrutou do mais alto prestígio. Ainda que o matemático não tenha sido seu fundador, essa escola foi a única a deter a obra do grande mestre em sua totalidade – ela foi apenas parcialmente publicada. O conjunto de conhecimentos da escola abrangia igualmente as obras dos discípulos ilustres que o sucederam e que aprofundaram seus métodos.

Essa organização rígida e compartimentada nem sempre foi unanimidade entre os matemáticos. Alguns, da escola de Seki, optaram por difundir os conhecimentos sem temer a punição. No final do século XVIII, a regra do segredo era cada vez menos respeitada diante da pressão provocada pela forte demanda por educação rural no país. A lógica econômica levou as escolas a crescerem e a estenderem sua influência nas regiões afastadas. Para isso, entraram em contato com os mestres de província ou enviaram mestres itinerantes encarregados de recrutar a clientela e trazê-la para a capital. Assim, a capacidade de uma escola de se fazer conhecer longe passou a ter importância.

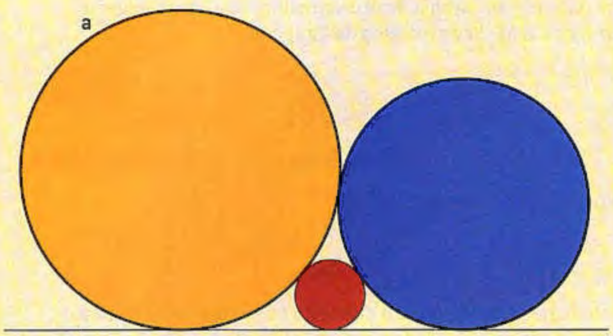
Foi nesse contexto social que as tabuletas conheceram uma popularidade extraordinária. Pode-se distinguir esquematicamente três funções preenchidas por elas.

O Papel das Tabuletas

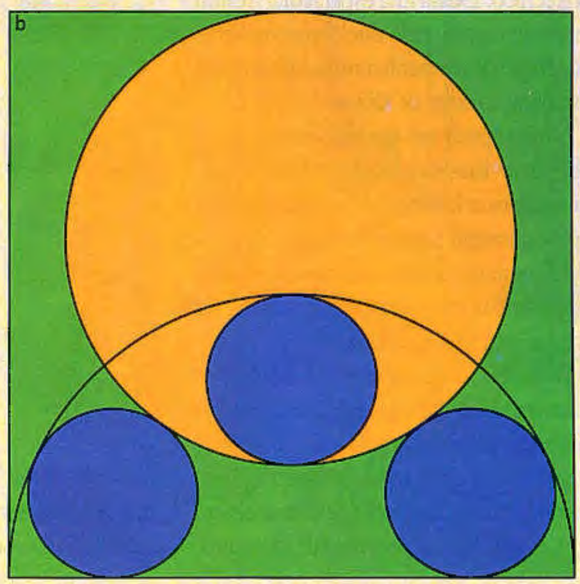
A PRIMEIRA FUNÇÃO, provavelmente a mais antiga, foi a de divulgar os jovens talentos isolados e desprovidos de recursos. Para esses últimos, pendurar a resolução de um problema difícil num lugar muito visitado era uma maneira eficaz de atrair a atenção para eles. Assim procedeu o matemático Aida Yasuaki (1747-1817) no momento em que decidiu se tornar conhecido na capital. Aida *(ver imagem 3)* era um samurai originário de Yamagata, cheio de ambição, mas sem recursos, que aprendeu matemática com um pequeno mestre do interior. Em 1781, colocou sua primeira tabuleta no santuário do monte Atago, que na época era um dos pontos de encontro favoritos dos matemáticos. Seu objetivo foi alcançado: algum tempo depois, quando decidiu bater na porta de Fujita Sadasuke (1734-1807), representante oficial da escola de Seki, seu nome já era conhecido.

Nesse episódio é possível observar a segunda função das tabuletas: a de colocar desafios e de se submeter à crítica. A lenda conta que quando Aida se apresentou diante de Fujita para lhe pedir para aceitá-lo como discípulo, o mestre exigiu que ele corrigisse o erro que havia cometido na resolução do problema de Atago. Essa humilhação esteve na origem de um conflito histórico que durante toda a vida iria opor os dois matemáticos por meio de outros discípulos. Durante sua longa e produtiva carreira (2 mil fascículos redigidos em 30 anos), Aida não deixaria de publicar "retificações" de problemas resolvidos por Fujita. Esse último, de sua parte, também não deixaria de "retificar" as "retificações" de seu adversário. Essa guerra declarada na escola que era de longe a mais prestigiada de Edo permitiu a Aida construir sua reputação. No plano científico, é difícil apontar um ganhador, pois havia muita má fé de ambas as partes. O problema de Aida, na origem da polêmica, não apresentava nenhum erro, mas apenas imperfeições re-

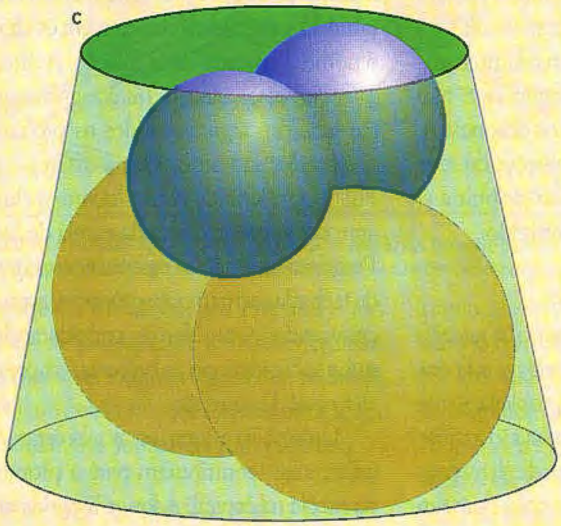
PROBLEMAS INSPIRADOS EM SANGAKU (respostas na página seguinte)



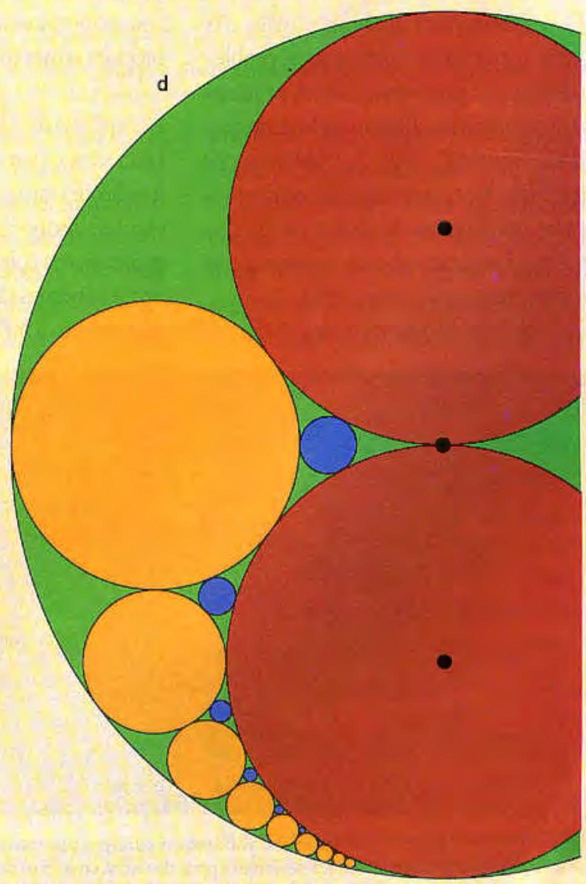
A. Problema clássico da matemática japonesa que se encontra em muitos manuais e tabuletas matemáticas. Os círculos azul, laranja e vermelho são tangentes entre si dois a dois, e tangentes à direita. Qual é o diâmetro do círculo vermelho, conhecendo os diâmetros respectivos dos círculos azul e laranja?



B. Num quadrado *(em verde)*, estão traçados um semicírculo – cujo diâmetro é igual ao comprimento do lado do quadrado –, um grande círculo *(em laranja)* e três pequenos círculos *(em azul)* que apresentam as propriedades de tangência indicadas na figura. Exprima o diâmetro D do grande círculo laranja a partir do diâmetro d dos pequenos círculos azuis



C. Num tronco de cone *(em verde)*, estão inseridas duas pequenas esferas *(em azul)* e duas grandes esferas *(em laranja)* de diâmetro respectivo D e d. Cada uma delas é tangente aos três outros, na parede exterior assim como a uma das bases. Os valores de D e d são conhecidos. Determine h, a altura do tronco de cone



D. Problema do *Tratado matemático das tabuletas sagradas*, de Fujita Sadasuke (1789): considere-se um grande círculo *(em verde)* no qual se inserem círculos "em série" *(em laranja)* e círculos "adjacentes" *(em azul)*. O diâmetro do grande círculo é de 97 polegadas e 5 décimos. O do último círculo "adjacente" é de um décimo. Não se conhece o número total de círculos "adjacentes". A quanto se eleva o número total de círculos "adjacentes" (a figura foi desenhada postulando-se que o último círculo "adjacente" era o nono), compreendido entre o primeiro e o último?

sultantes de um domínio ruim do vocabulário técnico. Dessa luta espetacular, restou sobretudo o gosto pelo duelo matemático e o papel que desempenharam as tabuletas na comunicação entre os sábios.

Numa época em que não existiam jornais nem revistas, os sangaku permitiam aos matemáticos se informar sobre os problemas da moda e reagir rapidamente aos desafios. Destes, os mais correntes assumiam a forma de problemas sem solução chamados de "legados" ou, em japonês, *idai*.

Contudo, os problemas já resolvidos podiam também dar lugar a duelos. Quando a resolução era considerada inábil e pesada, apelando para uma equação de grau inutilmente elevado, ela podia se tornar objeto de uma "retificação" por parte de um outro, gesto que era sentido pelo primeiro como uma humilhação. A "retificação" podia ser rabiscada numa folha de papel e fixada embaixo da tabuleta. Um mesmo sangaku recebia por vezes diversas correções ou várias observações por parte dos matemáticos.

Essa intensa atividade em torno das tabuletas apareceu nas coletâneas de problemas divulgadas nos anos 1790. A primeira do gênero, intitulada *Tratado matemático das tabuletas sagradas* (1789), foi publicada por Fujita. Nela há enunciados de problemas expostos no santuário do monte Atago que foram motivo de combates e terminaram com vantagem para a escola Seki.

As soluções propostas pelos matemáticos das outras escolas sofriam invariavelmente a suprema afronta de serem julgadas "erradas". O sucesso dessa coletânea, que seria seguida de edições ampliadas, provou quanto era importante para as escolas da época afirmarem sua supremacia no campo das tabuletas. Para conseguir isso, não hesitavam em recorrer a meios desonestos, como introduzir erros nas soluções de seus concorrentes para em seguida atribuir a si próprias o mérito de tê-los corrigido.

RESPOSTAS AOS PROBLEMAS DE SANGAKU

Resposta A: $1/\sqrt{r_3} = 1/\sqrt{r_1} + 1/\sqrt{r_2}$, onde r_1, r_2 e r_3 são respectivamente os raios dos círculos laranja, azul e vermelho. Pode-se resolver o problema com a ajuda do teorema de Pitágoras.

Resposta B: $D = 8d/3$

Resposta C: $h = (\sqrt{2Dd} + D + d)/2$

Resposta D: Designando por D o diâmetro do círculo verde e por d o diâmetro do último círculo "adjacente", o número N é igual a: $(\sqrt{D/d} - 14 + 1)/2$, ou seja, 16

BRYAN CHRISTIE

Função Publicitária

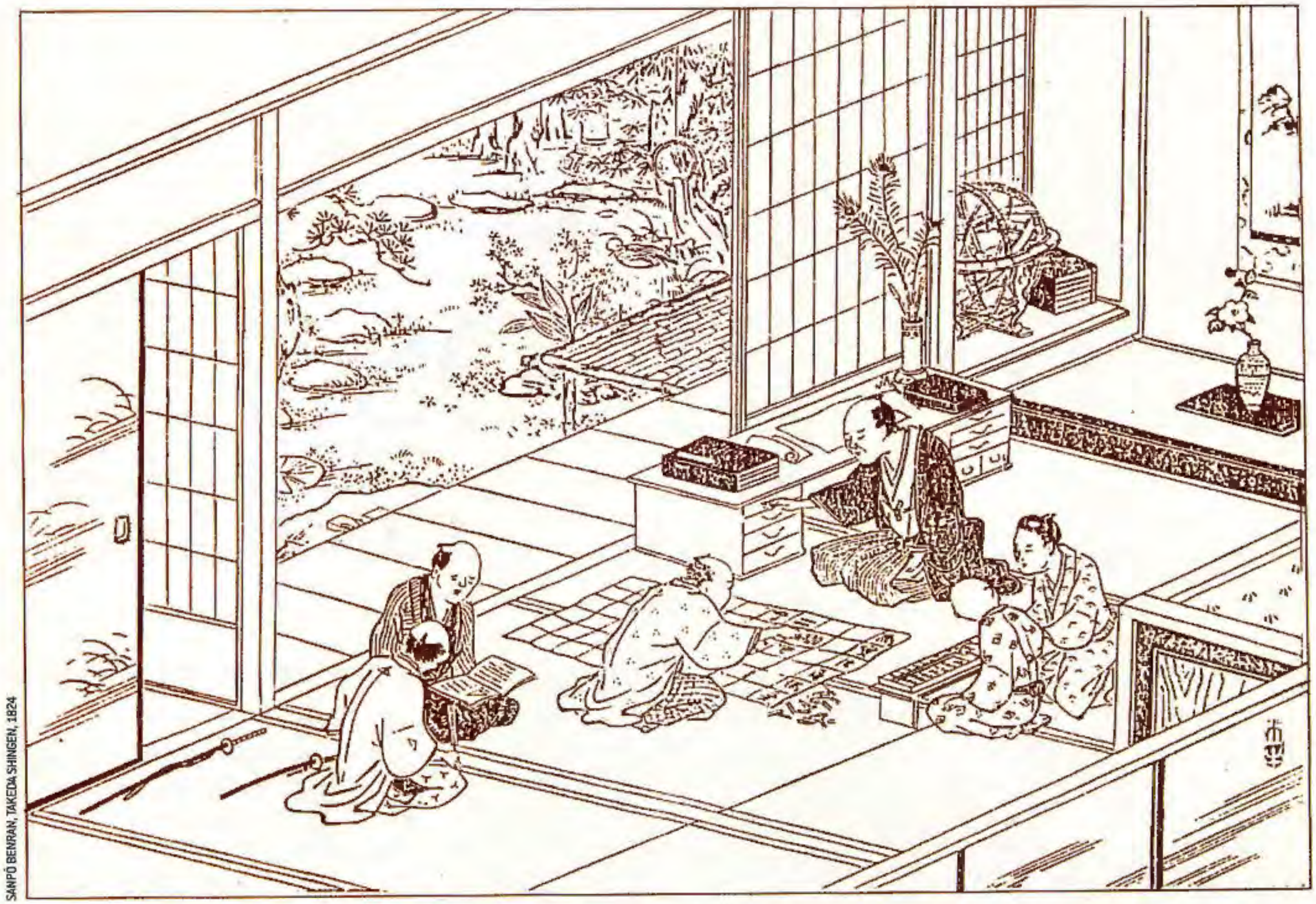
Isso nos conduz diretamente à terceira função dessas tabuletas, a propaganda das escolas. Todos os textos de problemas que aparecem na coletânea de Fujita são assinados, e os nomes são precedidos de elementos que exibem a influência da escola. Para um samurai da capital, por exemplo, indicava-se seu feudo de ligação; para um camponês ou comerciante, seu país de origem. Mais que a identidade dos autores, relegados ao fim da tabuleta, esses textos colocam em evidência o nome do mestre e sua filiação. Assim, no primeiro fascículo do *Tratado matemático das tabuletas sagradas*, todos os problemas destacados são atribuídos a discípulos de Fujita, apresentado como "quarto na linhagem dos representantes da escola de Seki". Pergunta-se então se esses autores eram só de fachada e se não era o próprio mestre que criava todos os problemas, considerando-se que a solução proposta brilhava sempre pelo alto nível de concisão.

Uma coisa é certa, essas tabuletas, reais ou fictícias, contribuíam para a promoção da escola na capital. A longa lista dos discípulos que aparece nas tabuletas demonstra sua influência no país, e a dificuldade dos problemas resolvidos oferece uma prova gritante de seu alto nível de competência.

Os sangaku estavam igualmente presentes no campo. Mas seu papel não era idêntico ao que tinham na capital, como mostram os diários de viagem deixados por Yamaguchi Kazu. Nascido em 1780, ele era o porta-bandeira da escola de Hasegawa, implantada em Edo, que ficou conhecida nos anos 1830 pela publicação de manuais que rompiam com a tradição do segredo e se distinguiam pela qualidade pedagógica. Entre 1817 e 1822, Yamaguchi realizou três viagens que o conduziram respectivamente

HIROSHI UMEOKA

4. AS TABULETAS MATEMÁTICAS DO JAPÃO mencionavam sempre os nomes dos matemáticos que supostamente teriam sido os autores desses problemas. Tratava-se na maior parte das vezes de autores de fachada, que haviam contribuído financeiramente para a preparação das tabuletas cujo conteúdo matemático fora ditado por mestres da capital



SANPÔ BENRAN, TAKEDA SHINGEN, 1824

5. ESCOLA DE MATEMÁTICA DE TAKEDA, em Osaka, no século XIX. O mestre dá instruções a um discípulo, que faz cálculos com a ajuda de pequenos bastões *(ao centro)*. Uma criança recebe ajuda para efetuar cálculos no ábaco *(à dir.)*. Outra estuda num livro *(à esq.)*. Percebe-se uma esfera armilar no fundo da sala, perto de uma parede de papel

à península de Chiba, em Honshu e nas regiões do sudoeste até a ilha de Kyushu. Durante suas longas viagens, ele manteve um diário detalhado que fornece indicações suplementares sobre o uso das tabuletas.

Mestres Itinerantes

A MANEIRA PELA QUAL Yamaguchi se dirigia invariavelmente aos templos e santuários quando penetrava num vilarejo revela que as tabuletas assinalavam a presença na localidade de um mestre de matemática. Ele também registrou bastante em seu diário de viagem a presença de problemas – indício de que a prática se expandira bastante na primeira metade do século XIX. No entanto, eles raramente lhe permitiram chegar aos mestres locais. As informações recolhidas junto aos habitantes eram mais confiáveis. Yamaguchi constatou com freqüência uma defasagem importante entre a reputação de que desfrutava o mestre local e sua competência real: o viajante experimentava um prazer cruel em provocar seu adversário tirando problemas difíceis da manga, um após outro.

Em suas viagens, Yamaguchi recolheu uma grande quantidade de jovens talentos. Numa correspondência que enviou a seu mestre na capital, ele o informava dos desejos de seus novos discípulos de pendurar uma tabuleta votiva numa região "distante", referindo-se com certeza a Edo. Pela leitura dessa carta, compreende-se que a oferenda de uma tabuleta era um assunto complexo. Ela exigia uma reflexão e uma colaboração ativa por parte dos altos responsáveis pela escola. A troca entre Yamaguchi e Hasegawa, seu superior, mostra que a contribuição científica dos discípulos para a redação das tabuletas foi nula e que foi sobre Yamaguchi que recaiu todo o encargo de conceber e resolver os problemas, trabalho ao qual ele dedicou grande atenção. Coube a Hasegawa confeccionar materialmente a tabuleta e depositá-la no lugar mais apropriado. A carta não traz nenhuma indicação sobre o aspecto financeiro da operação, mas supõe-se que teve grande peso na negociação.

Dessa forma, ainda que estudos recentes transmitam dessas tabuletas uma imagem muito mais prosaica que aquela que por muito tempo se imaginou, isso não impede que continuem sendo magníficos vestígios de um tempo feliz em que templos e santuários serviam de ponto de encontro para matemáticos vindos de todas as partes e em que jovens amadores cheios de entusiasmo desafiavam mestres estabelecidos. SA

Annick Horiuchi *dirige o Grupo de Pesquisas sobre o Japão em Ciências Sociais e Humanas (GREJA), na Universidade de Paris VII.*

PARA CONHECER MAIS

Les mathématiques peuvent-elles n'être que pur divertissement? Une analyse des tablettes votives de mathématiques à l'époque d'Edo. Annick Horiuchi, em *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, vol. 20, págs. 134-151, 1998.

Quadrados mágicos do Islã

Do século IX ao XII, os árabes deram status de nobreza a um curioso passatempo matemático

MELANCOLIA, gravura de 1514 de Albrecht Dürer, traz ao fundo, no alto à direita, a imagem de um quadrado mágico

Por Jacques Sesiano

O problema da construção dos quadrados mágicos é conhecido: trata-se de posicionar numa tabela quadrada números naturais diferentes, de forma que as somas, em cada linha, cada coluna e cada uma das duas diagonais principais sejam iguais. Em geral, preenche-se esse tipo de quadrado com a seqüência dos primeiros números naturais. Assim, num quadrado de n casas laterais (um quadrado de ordem n), inscrevem-se os n^2 primeiros números naturais. Sendo a soma desses números $1+2+3+....+ n^2 = [n^2(n^2+1)]/2$, a solução a ser encontrada em cada fileira – a soma mágica – é $[n(n^2+1)]/2$.

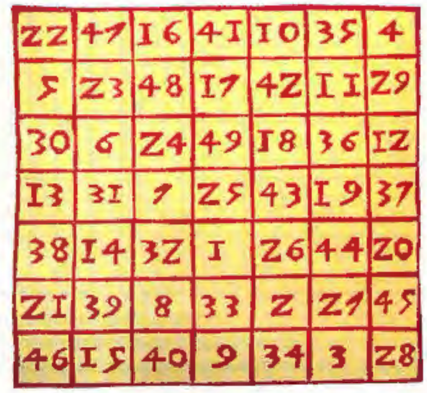
Pode-se construir um quadrado mágico para qualquer n, exceto $n = 2$. O menor quadrado mágico possível é, portanto, o de ordem 3, e ele tem apenas uma forma – se desprezarmos as inversões e as rotações. Mas é uma exceção. O quadrado de ordem 4 já oferece 880 possibilidades e esse número cresce rapidamente nas ordens seguintes.

Os quadrados mágicos chegaram à Europa no século XIV, em textos traduzidos do árabe. Os manuscritos traziam exemplos de quadrados que teriam propriedades nefastas ou benévolas, associadas aos sete planetas então conhecidos. Assim, as figuras ficaram conhecidas como mágicas ou planetárias. Essa segunda denominação desapareceu depois. A primeira foi conservada e, com ela, o desprezo pelos quadrados.

Entretanto, eles não tiveram sempre uma reputação duvidosa. Sua denominação árabe original – "disposição harmoniosa dos números" – os tornava perfeitamente respeitáveis e dignos da atenção dos matemáticos. A ciência dos quadrados mágicos evoluiu de estudos nos séculos IX e X até a época de ouro do século XII, quando ela atingiu seu apogeu no Islã.

Dois Autores, Dois Métodos

Nós conhecemos as origens dessa ciência por meio de dois textos do século X. Um é atribuído a Abul Wafa Al-Buzjani (940-998), famoso por seus trabalhos em astronomia e trigonometria. O outro, a Ali b. Ahmad al-Antaki (morto em 987). Enquanto o tratado do primeiro é prolixo e nos pemite seguir as tentativas antigas de chegar a métodos gerais, o segundo permanece conciso e ignora os métodos de construção simples, principalmente aqueles originados de transformações do quadrado natural, ou seja, do quadrado com a mesma ordem que o quadrado a ser construído, que continha os números consecutivos. Ele abre sua exposição desta forma: "Alguns começam por colocar os números segundo sua seqüência de ordem natural, a partir do 1 até o número que a figura, em que se deseja estabelecer a mágica, atinge. Depois eles tiram os números do lugar, sempre de forma a produzir um aumento em algumas fileiras e uma diminuição nas fileiras que lhes são opostas. Em seguida, eles ajustam o conjunto das fileiras segundo um mesmo modo. É um método que apresenta dificuldades para o iniciante. Outros são realizados de maneira mais fácil".



O QUADRADO MÁGICO *(à esq.)* do manuscrito *Ayasofya*, datado do século XIII, e seu equivalente *(à dir.,em que Z significa 2 e I vale 1)* no *Fragmentum de Inventionibus Scientarium* de Diego Palomino, publicado em Madri em 1599

Esse método mais fácil é a construção dos quadrados com bordas. A partir de um quadrado mágico conhecido, acrescenta-se uma borda que aumenta todas as suas linhas numa mesma quantidade.

Vamos reter isso: no século X, as transformações do quadrado natural para obter um quadrado mágico deveriam ser efetuadas separadamente para cada ordem. Um século depois, seriam deduzidos métodos gerais simples, em que não haveria mais necessidade de representar o quadrado natural. É essa mudança que descreveremos.

Quadrados de Ordem Ímpar

Abul wafa al-buzjani nos transmitiu dois exemplos de construções individuais para o quadrado de ordem 5 (*ver figura 1*). Nessas duas construções, Abul Wafa Al-Buzjani não modifica as diagonais do quadrado natural. Ele sabe que elas têm, de cara, a soma pedida – no caso, 65. No entanto, esse é apenas um caso particular de duas propriedades gerais do quadrado natural que tem um número ímpar de casas na lateral (*ver figura 7*). Primeiro, as somas nas fileiras medianas, horizontal e vertical são, cada uma, iguais à soma mágica para a ordem considerada. Em seguida, as somas nas diagonais, principais ou quebradas, também têm a soma mágica. Diagonais quebradas são os pares de diagonais parciais situadas de um lado e de outro de uma diagonal principal, compreendendo o mesmo número de casas que a principal: essas diagonais quebradas são inteiras quando colamos as bordas opostas do quadrado.

A construção proposta por Ibn al-Haytham (cerca de 965-1041) está fundamentada nessas duas propriedades, como nos relata um autor do século XII: "Al-Haytham recomendou desenhar dois quadrados, escrever em um deles os números de

a

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

b

1	2	3	12	5
18	7	20	9	10
11	4	13	22	15
16	17	6	19	8
21	14	23	24	25

c

1	23	24	12	5
18	7	20	9	11
10	4	13	22	16
15	17	6	19	8
21	14	2	3	25

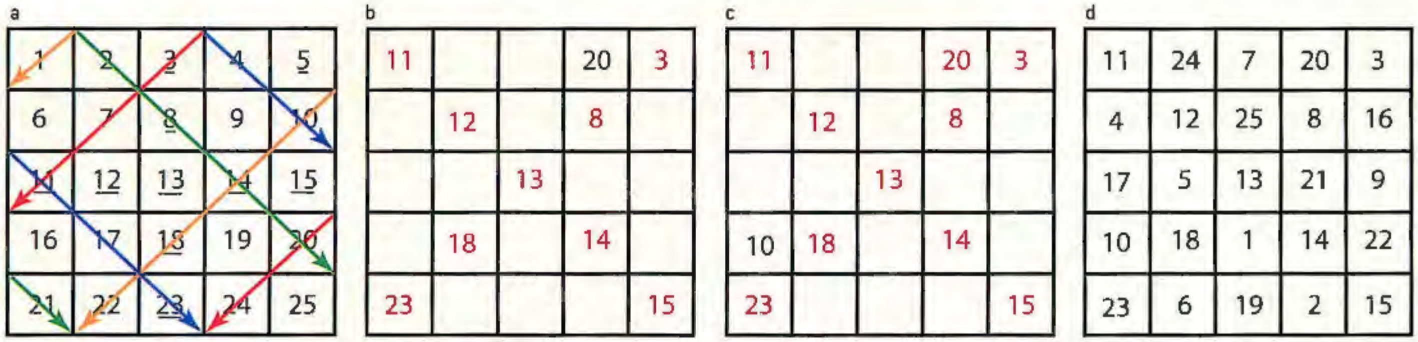
d

1	14	3	4	5
18	7	20	9	10
11	24	13	2	15
16	17	6	19	8
21	22	23	12	25

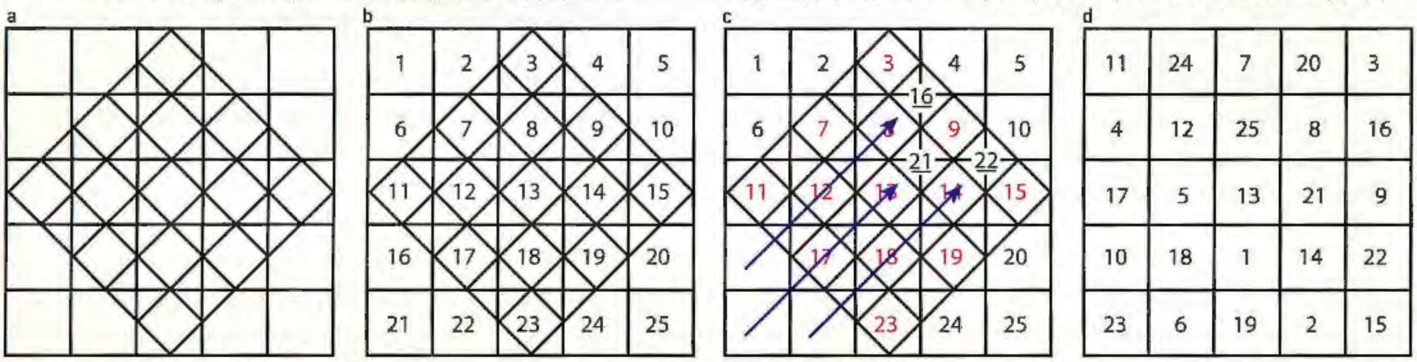
e

1	14	22	23	5
18	7	20	9	11
10	24	13	2	16
15	17	6	19	8
21	3	4	12	25

1. OS DOIS MÉTODOS de Abul Wafa Al-Buzjani (do século X) para construir um quadrado mágico de ordem 5 *(os números manipulados estão sublinhados; os números fixos estão em vermelho; as flechas indicam as trocas realizadas)*.
Primeiro método: mantemos os números das diagonais do quadrado natural em seu lugar *(a)*; trocamos os números do quadrado interior de ordem 3 *(contornado em verde)* com os da casa distante de duas casas na diagonal *(b, flechas vermelhas)*; trocamos finalmente os números das extremidades que ainda não foram trocados com aqueles da fileira oposta, conservando sua ordem de sucessão *(c, flechas violeta)*.
Segundo método: sem mexer, de novo, nos números das diagonais *(a)*, invertemos os pares de números aproximando a diagonal descendente *(d, flechas laranja)*. Depois, como antes, trocamos os números restantes das bordas com os das laterais opostas *(e, flechas azuis)*. Nos dois casos *(c e e)*, os quadrados obtidos são mágicos

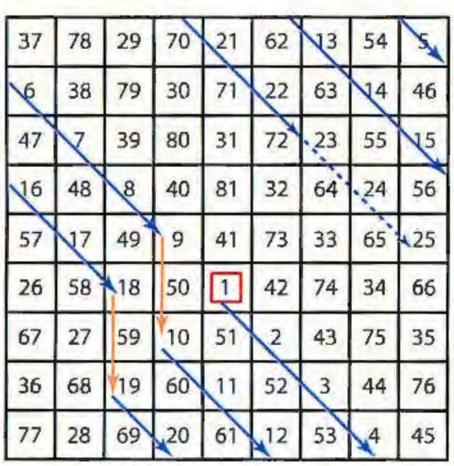


2. O MÉTODO DE IBN AL-HAYTHAM. Os números da linha e da coluna medianas de um quadrado natural *(a)* tomam-se os das duas diagonais do quadrado a ser construído *(b)*. Sobram linhas e colunas para preencher. Ora, para cada uma, exceto para a linha e a coluna medianas, duas casas já estão ocupadas. As propriedades dos quadrados naturais nos ajudam a completar o quadrado. Por exemplo, a linha que contém os números 3 e 11 deve conter elementos da diagonal quebrada correspondente *(a, em vermelho)* do quadrado natural, assim como a coluna que contém 8 e 14 será feita de elementos da diagonal correspondente *(a, verde)*. Sua intersecção será, então, o elemento comum, 20. Segue-se esse padrão *(em c, o número 10 é a intersecção das diagonais quebradas azul e laranja do quadrado a)*. No final, o quadrado é mágico *(d)*



3. O MÉTODO DE UM AUTOR DO SÉCULO XII. Inscreve-se, primeiro, no quadrado da ordem escolhida (aqui, 5), um quadrado oblíquo, e menor, da mesma ordem *(a)*. Ao colocar números naturais no quadrado externo, algumas casas do quadrado oblíquo estarão preenchidas, enquanto outras, as dos cruzamentos, ficam vazias. Deslocando os grupos de três números que ocupam cada um dos cantos do quadrado natural em direção ao lado oposto do quadrado oblíquo *(c, flechas azuis)*, este se torna mágico *(d)*

acordo com sua seqüência natural e transferir o conteúdo das duas fileiras medianas, vertical e horizontal, para as duas diagonais do outro quadrado. Ele opera, em seguida, a transferência do conteúdo das diagonais restantes, em direção a seus opostos, submetido a extensas condições, que demoraria muito mencionar e cuja realização apresenta, para o iniciante, muitas dificuldades". Seu relato pára aí, mas podemos adivinhar como o quadrado é completado (*ver figura 2*). Se o autor do século XII interrompeu seu relato, foi também por ter um outro método para propor (*ver figura 3*).



Como dispensar o quadrado natural? Eis uma forma (*ver figura 4*): inscreve-se 1 em uma das quatro casas contíguas à casa central – digamos a de baixo. Colocam-se os números seguintes prosseguindo diagonalmente para baixo. Quando se chocar numa das laterais, transfere-se para a casa seguinte do lado oposto (como numa diagonal quebrada). Depois da inclusão de uma quantidade de algarismos igual à ordem, a progressão é bloqueada: desce-se então verticalmente duas casas, independentemente da grandeza da ordem, e prossegue-se assim até o preenchimento total do quadrado.

Esse método é aplicável a todas as ordens ímpares. Abul Wafa Al-Buzjani conhecia as duas propriedades do quadrado natural de ordem ímpar. No entanto, ele tinha conservado para a figura mágica as duas diagonais do quadrado natural. Optando por ocupar as diagonais com as duas fileiras medianas do quadrado natural, Ibn al-Haytham foi conduzido ao método geral precedente.

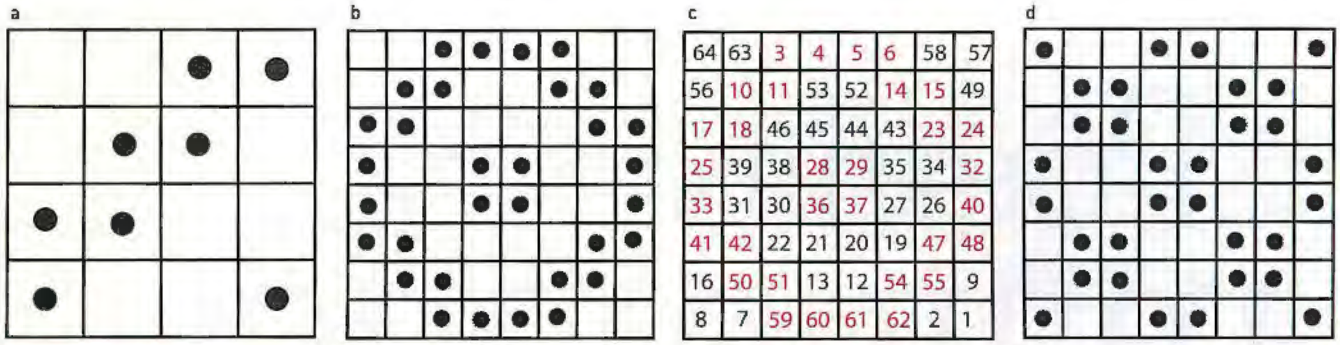
4. QUADRADO MÁGICO elaborado sem quadrado natural seguindo um método geral. Partimos de uma casa *(contornada em vermelho)* vizinha à casa central e seguimos *(flechas azuis)* as diagonais quebradas, ou seja, como se as extremidades opostas do quadrado estivessem unidas. Quando topamos com uma casa preenchida *(aqui, depois da casa 9)*, deslocamos duas fileiras para baixo *(flecha laranja)* e recomeçamos a completar. O quadrado final é mágico

Quadrados de Ordem Par

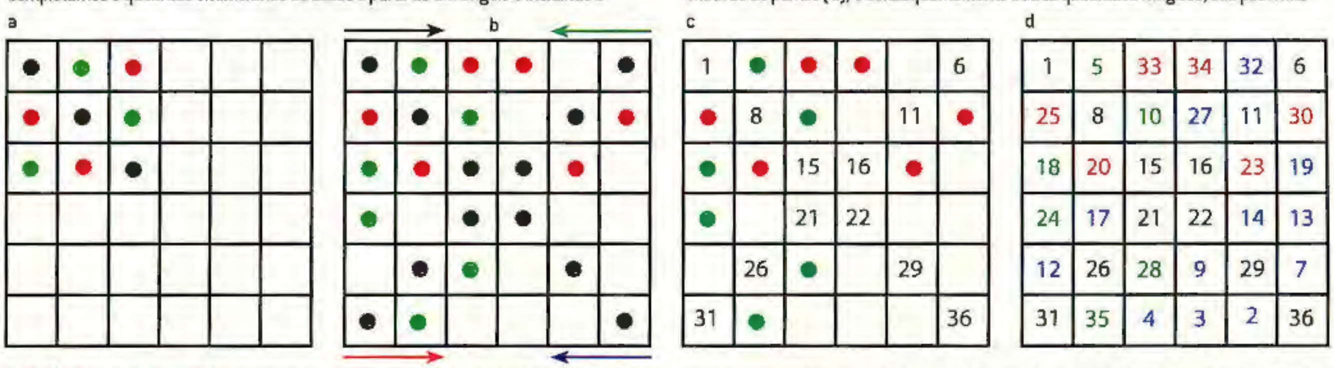
IBN AL-HAYTHAM menciona que os quadrados naturais com ordem par têm duas propriedades, análogas aos precedentes – apesar de isso já ser conhecido antes. A soma da metade dos elementos de uma linha, unida à soma da metade dos elementos não alinhados com os precedentes, pertencendo à fileira colocada simetricamente em relação à fileira mediana, é igual à soma mágica. Aliás, a soma em cada diagonal (principal ou quebrada) é igual à soma mágica.

Essas propriedades permitiram estabelecer os primeiros quadrados mágicos de ordem par. Conservando imutáveis as duas diagonais principais, segue-se para igualar as linhas, trocando a metade de seus elementos. Igualam-se as colunas de novo com a troca da metade de seus termos. Mas atenção: isso não pode ser feito de qualquer jeito, com o risco de desordenar as linhas, e é preciso verificar a igualdade resultante.

Podemos evitar essa armadilha usando



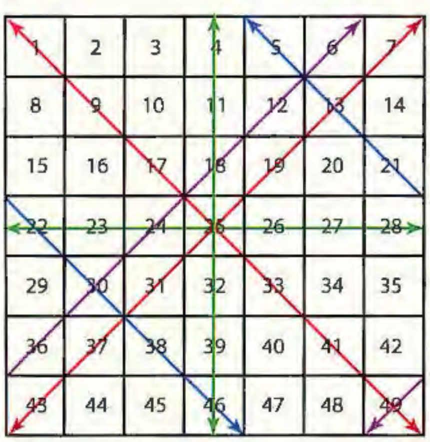
5. TROCAS DIAGONAIS permitem construir quadrados mágicos de ordem $n = 4k$ (aqui $k = 2$). No primeiro quadrante *(a)*, colocamos pontos de forma que se tenha exatamente k por fileira horizontal e vertical. Aproximamos em seguida esse quadrante de seus vizinhos *(b)*, girando-o em torno das laterais, e transferimos os pontos para as casas encobertas. Completamos o quadrado enumerando as casas a partir de um ângulo e incluindo o número obtido apenas nas casas com pontos. Chegando ao ângulo oposto, partimos novamente, enumerando de novo as casas e incluímos, desta vez, o número obtido nas casas vazias. O quadrado obtido é mágico *(c, os números inscritos nas casas em que estavam os pontos estão em vermelho)*. Construídos sobre o mesmo modelo, outros motivos de pontos *(d)*, e conseqüentemente outros quadrados mágicos, são possíveis



6. O MÉTODO DE AL-KHARAQI para compor um quadrado mágico de ordem $n = 4k+2$ (aqui, $k = 1$ e, portanto, $n = 6$). Tomamos o primeiro quadrante *(a)*, de ordem $2k+1$ e colocamos em sua primeira fileira k (= 1) um ponto preto, um ponto vermelho e um verde – estes dois sendo inscritos fora da diagonal. Completamos a repartição no primeiro quadrante de forma a que as diagonais quebradas tenham o mesmo tipo de pontos e aproximamos em parte esse quadrante dos outros, transferindo os pontos pretos para todos os lados, mas os pontos vermelhos unicamente no quadrante vizinho superior e os pontos verdes unicamente no quadrante vizinho inferior *(b)*. Então, contamos as casas. Partimos do ângulo do primeiro quadrante para as casas dotadas de um ponto preto, seguindo a flecha preta; do outro ângulo superior para os pontos verdes (partindo de 1) no sentido da flecha verde; do ângulo inferior oposto para os pontos vermelhos (partindo de 1) e seguindo a flecha vermelha; e do ângulo oposto ao primeiro para as casas vazias e seguindo a flecha azul. A cada vez, só inscrevemos o número correspondente na casa quando ela é da cor conforme a regra seguida – contém o ponto da cor dada ou está vazia *(em c, só fazemos a numeração das casas dotadas de um ponto preto)*. O quadrado obtido é mágico *(d)*

trocas diagonais, que compensam, ao mesmo tempo, as linhas e as colunas. Configurações como as da figura 5 são freqüentes nos textos árabes desde o século XI.

O método precedente só funciona quando o quadrante é, ele mesmo, de ordem par. O caso de um quadrado de ordem par divisível apenas por 2 ($n = 4k+2$) é menos simples e o método geral para tais quadrados foi descoberto no século IX. Esse método geral foi exposto num opúsculo de Al-Kharaqi, escrito por volta de 1100 (*ver figura 6*).



7. EM UM QUADRADO NATURAL (os números são colocados na ordem), a soma das diagonais principais *(em vermelho)*, da linha e coluna mediana *(em verde)* e das diagonais quebradas *(dois exemplos, em azul e violeta)* é igual à soma mágica – aqui, 175 – para a ordem considerada: 7, no caso

As razões dessa mágica também estão nas duas propriedades do quadrado natural de ordem par. Supõe-se que só vamos incluir pontos pretos. Com os k pontos por linha do primeiro quadrante, transferidos em seguida para os outros quadrantes, teremos em cada fileira $2k$ pontos e $2k+2$ casas vazias. Graças à contagem das casas a partir de dois ângulos opostos, teríamos então efetuado $2k+2$ trocas diagonais. Isso convém, como vimos, para a igualdade de um quadrado de ordem $4k+4$, mas não para o nosso, de ordem $4k+2$, que só pede $2k+1$ trocas para as linhas e o mesmo número para as colunas. É preciso, então, suprimir uma troca para as linhas e uma troca para as colunas. É ao que conduzem os pontos vermelhos e verdes: os vermelhos anulam uma troca entre colunas por $2k+1$ elementos e os verdes fazem o mesmo para uma troca vertical substituindo em suas linhas originais $2k+1$ números deslocados diagonalmente. Assim, realizamos bem as $2k+1$ trocas desejadas entre pares de fileiras conjugadas, deixando as diagonais intactas.

Com esse método, o problema da construção dos quadrados estava fundamentalmente resolvido, mas o campo de pesquisa não tinha perdido sua fertilidade: ainda se podiam variar os métodos ou impor novas restrições. Esse foi o legado. SA

Jacques Sesiano é professor de história da matemática da Escola Politécnica Federal de Lausanne.

PARA CONHECER MAIS

Les carrés magiques dans les pays islamiques. Jacques Sesiano. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2004.

Poemas matemáticos

Por Ahmed Djebbar

Os cientistas árabes divulgavam seu saber na forma de versos que facilitavam a memorização e divertiam a sociedade

1. OS PRIMEIROS VERSOS do poema álgébrico de Ibn Al-Yasamin, cujos três últimos podem ser traduzidos da seguinte forma:
A álgebra se aplica a três coisas: o bem, os números e as raízes
O bem é todo número quadrado e sua raiz é um de seus lados
E o número absoluto é aquele que não tem relação com o bem ou a raiz
Entenda isso e você vai prosperar

Do século IX ao fim do século XI, as ciências nas regiões do Islã eram expressas quase exclusivamente em língua árabe. A partir do século XII, foram forjadas terminologias científicas em duas outras línguas: o persa, na Ásia central, e o hebreu, no Ocidente muçulmano. Entretanto, ao contrário dos cientistas indianos, que escreviam seus textos em verso, a prosa foi a expressão científica majoritária das três línguas na terra do Islã.

Contudo, como a poesia gozava de prestígio nas diferentes camadas sociais do império, os cientistas não tardaram a se interessar por ela, como objeto de estudo e como meio de expressão ou instrumento pedagógico. Para o fim educacional, a poesia trazia uma dimensão lúdica a diversos tópicos da ciência do cálculo. Os escritos científicos dessa época contêm exemplos variados que ilustram os dois aspectos da relação entre a poesia e as ciências – mais particularmente a matemática.

A partir do século VIII, o intelectual Al-Khalil Ibn Ahmad analisou a estrutura interna da poesia árabe pelo do estudo de sua métrica. Ele estabeleceu uma teoria que explica a constituição dos metros a partir da concatenação de dois sons elementares (conhecidos como "som mudo" e "som inerte") e, depois, da combinação de ritmos fundamentais ou secundários e de sua permutação circular.

Esses foram os primeiros passos da ciência árabe no domínio da combinatória. Al-Khalil Ibn Ahmad realizou também estudos sobre a língua árabe e o cálculo, seguindo o caminho da combinatória de todos os radicais bilíteres, trilíteres, quadrilíteres e qüintilíteres das palavras dessa língua. Em árabe, cada palavra deriva de um radical de dois, três, quatro ou cinco fonemas, ao qual se acrescentam prefixos e sufixos (as vogais e as letras dobradas não são levadas em conta). Assim, várias palavras são associadas a um mesmo radical. O trilítere J B R, por exemplo, origina as palavras *al-jabr* (álgebra – *al* é um artigo) e *djebbar* (aquele que cura ou o Onipotente, quando se trata de Alá).

Entretanto, a poesia foi, sobretudo, um instrumento e um vetor de "divertimento científico". Esse papel ganhou espaço com a emergência de novas camadas da sociedade, como funcionários públicos, professores, pessoas da corte etc. Esses diferentes grupos passaram a consumir, a partir do século X, não mais o conteúdo da ciência que era ensinado nas instituições, mas uma versão mais vulgarizada do saber erudito apresentada como uma nova forma de cultura. Um dos exemplos mais célebres de poesia a serviço do discurso científico é o poema médico *Urguza Fi 'T-Tibb* de Ibn Sina (Avicena, para o Ocidente). Trata-se de um resumo, em verso, dos elementos de base da medicina do século XI: observações, conselhos terapêuticos, técnicas cirúrgicas simples etc. O caráter pedagógico desse poema lhe rendeu diversas traduções no latim, entre os séculos XIII e XVII, sob o título *Cantica Avicennae*, na época em que o *Cânone da medicina*, do mesmo autor, era a referência no assunto.

Em matemática, os poemas didáticos ou lúdicos visaram dois tipos de público. O primeiro era constituído por alunos e professores. Os autores se dirigiam a eles por meio de poemas que apresentavam objetos, ferramentas e procedimentos para resolver problemas. O mais antigo desses poemas (*ver figura 1*) trata dos elementos de base da álgebra. Ele é constituído por 54 versos nos quais o autor, o matemático magrebino do século XII, Ibn Al-Yasamin, expõe as noções de desconhecido e de equação, assim como os procedimentos elementares para equacionar um problema. Depois, ele definiu as seis equações canônicas que Al-Kharizmi tinha estudado pela primeira vez no começo do século IX. Em comparação com a prosa simples dos matemáticos, o ritmo e as rimas ajudam a aprender, pela memorização. O poema de Ibn Al-Yasamin teve grande sucesso e foi comentado até o século XV em diferentes cidades do império.

Entre os outros assuntos que foram objeto de versificação, citemos um método para resolver problemas de primeiro grau sem utilizar as ferramentas de álgebra, os procedimentos de verificação de uma operação aritmética (as provas do 7, do 8, do 9, do 11 e do 13) etc.

O segundo aspecto da poesia na matemática se inscreve no campo das atividades culturais e lúdicas. Originalmente, durante os saraus, eram declamados poemas de sátira, de enaltecimento ou recitavam-se versos que deveriam começar pela última letra do verso precedente. Depois essas atividades foram enriquecidas com enigmas versificados, problemas recreativos e, às vezes, até bilhetes amorosos em forma matemática.

Entre os enigmas, alguns consistem em adivinhar o nome de um personagem célebre, como ocorre com Muhammad, o profeta (Maomé), nesse poema encontrado num manuscrito do século XIII:

O nome daquele que Deus me fez amar,
É um príncipe que o procura, saiba disso,
Seu primeiro é um número igual ao valor do terceiro.
Seu segundo é o quinto daquele que o segue,
E o quinto do primeiro desconhecido;
Seu último é o décimo daquele que o precede
E uma parte de sua soma, saiba disso.

A elaboração desse problema consiste em substituir as letras que compõem o nome escondido por seus valores respectivos na numeração alfabética que os astrônomos dos países islâmicos tomaram emprestado dos gregos. Essa numeração utiliza as 28 letras do alfabeto árabe: nove para as unidades, nove para as dezenas, nove para

2: ESSE BILHETE AMOROSO sob a forma de um enigma versificado está no fim de uma epístola extremamente séria do não menos sério matemático de Marrakech Ibn Al-Banna:
Três sétimos do coração para seu olhar.
Um sétimo é oferecido para a rosa de suas duas bochechas.
Um sétimo e a metade de um sétimo e o quarto,
Pela recusa de um desejo insatisfeito.
Um sétimo e um sexto de um quarto são a parte dos seios bem redondos
Que se recusaram ao pecado do meu abraço e me empurraram
O resto, que está em cinco partes, e pelas palavras dela,
Que estancariam minha sede se tivessem sido escutadas.
Se considerarmos x o coração inteiro, temos:
$[3/7 + 1/7 + 1/7 + (1/7)/2 + (1/7)/4 + 1/7 + ((1/7)/4)/6]\,x + 5 = x$, sendo $x = 168$

as centenas e a 28ª para os milhares. Em nosso exemplo, o nome de Muhammad é constituído por seu radical quadrilírere M, H, M, D. Os valores numéricos desses fenômenos são, respectivamente, 40, 8, 40, 4. Para resolver o enigma, basta lembrar que o árabe se escreve da direita para a esquerda, tornando M a primeira letra, H a segunda e D a última. O poema se traduz pelo sistema de equações: $x_1 = x_3$; $x_2 = x_3 / 5$; $x_2 = x_1 / 5$; $x_4 = x_1 / 10$; sendo x_1, x_2, x_3 e x_4 valores de letras.

A figura 2 ilustra um enigma na categoria dos bilhetes amorosos. Já esta poesia sobre o quadrado e sua diagonal é um exercício puramente matemático:

Um quadrado que tem sua área em sua diagonal,
Sua medida absorveu os primeiros sábios.
Sobre seus dois lados o equivalente de duas raízes de sua diagonal.
No momento da medição, como explicar isso?

Sua transcrição matemática é:
Se x *é a lateral do quadrado e* d *sua diagonal:*
Se temos: $x^2 = d$ *e* $2x = 2\sqrt{d}$.
Como, segundo o teorema de Pitágoras: $2x^2 = d^2$.
Temos: $2d = d^2$. *Sendo:* $d = 2$ *e* $x = \sqrt{2}$

Durante o apogeu das ciências árabes, essencialmente do século IX ao XII, o papel pedagógico da versificação da matemática foi relegado à memorização. Com o declínio das atividades científicas, os matemáticos se contentaram em publicar poemas didáticos, manuais abreviados e comentários e glosas. SA

Ahmed Djebbar é professor da Universidade de Ciências e Tecnologias de Lille.

PARA CONHECER MAIS

L'Algèbre arabe, genèse d'un art. Ahmed Djebbar. Ed. Vuibert-Adapt, 2005.

África, berço da Matemática

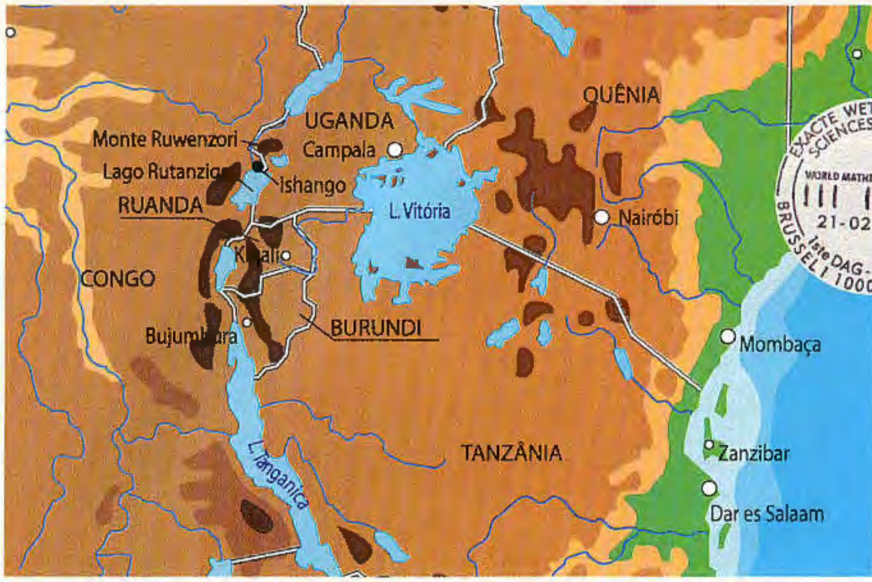
Um osso petrificado encontrado entre Congo e Uganda sugere que há mais de 20 mil anos a humanidade já era capaz de pensar numericamente

Por Dirk Huylebrouck

Nos anos 1950, o arqueólogo belga Jean de Heinzelin empreendeu escavações no Congo, perto da fronteira com Uganda, às margens do lago Rutanzige (ex-lago Alberto). A administração colonial responsável pelos Parques Nacionais o encarregou de inspecionar um sítio perto do vilarejo de Ishango *(ver mapa na pág. 44)*. Nessa região vulcânica, havia a esperança de encontrar uma Pompéia africana da pré-história, e o jovem geólogo entendeu sua importância. Ele levou os objetos encontrados para o Instituto Real das Ciências Naturais, na Bélgica, e especialmente um deles chamou a atenção: um pequeno osso petrificado, de apenas 10 cm de comprimento, ornado com um cristal de quartzo em uma extremidade e que trazia três séries de entalhes, agrupados *(ver figura na pág. ao lado)*.

O objeto é misterioso por diversas razões. As ferramentas manuais eram raras entre as populações bantu, aparentadas ao povo de Ishango. Além disso, o cristal de quartzo – que não pode ser separado do cabo – faz do objeto um tipo de instrumento para gravação, numa cultura que supostamente não conhecia a escrita. Ignora-se, hoje, de qual animal provém o osso petrificado, mas o problema da datação já foi resolvido. Na época da descoberta, existiam poucas tábuas de correção para datar, pelo carbono 14, objetos petrificados encontrados em regiões vulcânicas (as tábuas de correção são necessárias para considerar variações temporais das quantidades de carbono 14 atmosférico). Mas aos poucos o método foi sendo afinado e os resultados, corroborados por outros métodos: o objeto tem entre 20 mil e 25 mil anos. Veremos que, além de sua idade e seu ineditismo,

O BASTÃO DE ISHANGO, exposto no Instituto Real de Ciências Naturais da Bélgica, constitui o mais antigo testemunho matemático da humanidade



O VILAREJO DE ISHANGO, onde foi encontrado o bastão, fica situado no Congo, na fronteira com Uganda, ao norte do lago Rutanzige. O artefato foi homenageado durante o Ano Mundial da Matemática, em 2000, pela emissão de um selo no qual figuram os três e seis traços do osso

o caráter matemático desse osso torna o objeto extremamente precioso.

Jogo ou Calendário?

O BASTÃO COMPORTA uma primeira coluna de entalhes *(ver figura na pág. 46)* unidas em pequenos grupos: de 3 e 6 entalhes; 4 e 8; 10; 5 e 5; e, finalmente, 7 entalhes. Duas outras colunas são constituídas por grupos de 11, 21, 19, 9 e 11, 13, 17 e 19 entalhes.

Heinzelin via nesses entalhes um jogo aritmético: uma operação de duplicação dos números aproximada na primeira coluna, seguida do "ritmo" de 10 + 1, 20 + 1, 20 - 1, 10 - 1 e, na seguinte, os números primos entre 10 e 20.

Contudo, em 1972, o jornalista americano Alexander Marshack defendeu outra interpretação – a de que o bastão representaria um calendário lunar. A soma de cada uma das duas últimas colunas (11, 21, 19, 9 e 11, 13, 17, 19) dá 60, ou seja, dois meses lunares, enquanto a primeira coluna totaliza 48 traços, ou um mês e meio lunar.

Dessa forma, esse pequeno objeto – encontrado em pleno coração da África 15 mil anos antes dos primeiros cálculos dos faraós e 18 mil anos antes do surgimento da matemática na Grécia – espantou bastante a comunidade científica, uma vez que os traços agrupados manifestavam uma lógica matemática cujo significado era desconhecido.

A falta de pistas ligadas ao contexto era um empecilho à interpretação de Heinzelein e, inversamente, um argumento forte para a de Marshack. Na época da descoberta, conhecia-se pouca coisa sobre os jogos aritméticos na África, ao passo que diversas demonstrações militavam em favor da tese do calendário lunar. O objeto se parecia com diversas outras pistas do interesse do homem pré-histórico pela abóbada celeste – sendo uma das provas mais antigas a pedra de Blanchard, encontrada em Dordonha (sudoeste da França).

Alguns arqueólogos, no entanto, tinham dificuldade em seguir a hipótese do calendário a partir das marcas pré-históricas. Talvez faltasse a esses céticos um pouco de fantasia, mas o tempo lhes daria razão: o bastão de Ishango testemunha a acuidade matemática das populações lacustres de mais de 20 mil anos atrás.

No entanto, o primeiro motivo de espanto em relação ao artefato é a raridade de objetos gravados com fins aritméticos na África. O osso de Ishango teve uma sorte excepcional: foi conservado porque ficou enterrado sob a lava da cadeia de vulcões

de Katwe-Kikorongo. O lugar foi ocupado diversas vezes, empilhando camadas de mais de quatro metros de altura. A camada mais rica, chamada "nível fossilífero principal", forneceu o contexto arqueológico do bastão gravado: encontram-se ali instrumentos (em pedra e osso), restos de fauna e até de ossadas humanas.

Vários outros objetos, como bastões ou cordões, eram utilizados para contar, mas eram feitos freqüentemente com materiais perecíveis. Além disso, os cordões com nós eram tradicionalmente queimados assim que o evento que eles contavam tivesse passado. Esses recursos eram usados bem antes da colonização, como é possível perceber pelo relato dos primeiros exploradores, James Grant e John Speke (ambos percorreram a região dos Grandes Lagos no século XIX), que expressaram surpresa diante dos hábitos tradicionais na região, de usar os cordões para memorizar os dias da semana ou do mês, registrar pagamentos e empréstimos, lembrar da quantidade de água distribuída ou do número de instrumentos de defesa transportados etc. Missionários levaram alguns desses cordões para a Europa, e é possível que museus da África conservem alguns em seu acervo. Mas eles não são expostos, pois o público prefere ver objetos mais espetaculares, como máscaras coloridas.

Entretanto, traços ou nós não implicam necessariamente um conhecimento da noção de número. Em busca da prova contrária – e para persuadir a pátria-mãe –, os primeiros missionários constataram, em plena selva, os talentos aritméticos dos "indígenas", imortalizando em sua câmera fotográfica os cálculos dos africanos. Em 1909, um relatório sobre o Congo belga ilustrava, por meio de fotos, gesto dos africanos representando os números.

Os etnomatemáticos observaram que os gestos e as palavras para designar uma mesma quantidade podiam diferir dentro de um mesmo povo – o que explica os entalhes do osso de Ishango. Oralmente, um número como 7 era expresso numa mesma língua por 5 e 2, e às vezes por 4 e 3. A variação é semelhante à que ocorre na língua portuguesa, quando o artigo "um" torna-se "uma" diante de um nome feminino. Assim, os quatro traços grandes e os três pequenos (do 7) no bastão de Ishango, e as "duplicações" que se acreditava encontrar no objeto corresponderiam às diversas formas de exprimir os números. Por exemplo, os mbai (etnia nilo-saariana que vive na República Centro-Africana, no Chade e na Nigéria), dizem *muta muta* para o 6 (ou seja, 3 + 3); 8 torna-se *soso* (4 + 4) etc. Em várias línguas da África Oriental, *munane*, ou 8, corresponde a *ne-na-ne* – ou seja, 4 + 4.

A possível presença simultânea de dois sistemas de numeração no bastão de Ishango não tem nada de surpreendente quando se estuda o sistema baali (etnia do Alto Congo, na região do rio Tshopo), em que 4 e 6 são os números de base. O papel do 10, base da numeração no sistema decimal, é desempenhada pelo 24 (4 x 6). Quando o 576 (24^2) é obtido, uma nova palavra é inventada, e o método de contagem recomeça do início. Os ndaaka (etnia do noroeste do Congo conhecida pelas máscaras em ráfia) misturam as bases 10 e 32: 10 é conhecido por *bokuboku*; 12, *bokuboku no bepi* (10 + 2); 32 é *edi*; e 64, *edibepi* (32 x 2); 1.024 se diz *edidi* (32^2), e 1.025 (32^2 + 1), *edidi negana*.

Talentos Aritméticos

De qualquer modo, "saber enumerar" não significa saber fazer raciocínios matemáticos como aqueles que se acreditava deduzir dos entalhes do bastão de Ishango. No entanto, às lendas da região sul do Saara – que contavam que um missionário tinha mais sucesso com as tábuas de multiplicação que com as de Moisés – podem ser acrescentados relatos mais confiáveis que mostram um grande interesse dos africanos pela aritmética – bem antes da colonização.

Uma das histórias é contada por John Fauvel e Paulus Gerdes, sobre o jovem escravo africano Thomas Fuller, que foi para a América em 1724, com 14 anos. Segundo o relato, ele sabia determinar num cálculo mental de um minuto e meio que há 47.304.000 segundos em um ano e meio, ou ainda, 2.210.500.800 segundos em 70 anos, 17 dias e 12 horas. Esta última conta, o garoto fez para corrigir homens que faziam cálculos no papel, assinalando que eles haviam esquecido de contar os anos bissextos. Outras proezas aritméticas da África foram a multiplicação pelo sistema numérico de base 20 dos iorubás e outra, fundamentada nas duplicações e divisões por dois.

No final, o bastão de Ishango tornou-se um objeto que confirmava que alguns africanos gostavam de se divertir fazendo cálculos, assim como outros preferiam contar histórias ou se exprimir pela pintura ou pela música.

Nenhum traço de percepção dos números primos foi observado. No entanto, sistemas numéricos de base mista, como 6 e 10, poderiam explicar a seqüência 5 (6 - 1), 7 (6 + 1), 11 (2 x 6 - 1), 13 (2 x 6 + 1), 17 (3 x 6 - 1), 19 (3 x 6 + 1) para os quatro primeiros números (11, 13, 17 e 19) que constituíam os entalhes de uma das colunas do bastão; e 9 (10 - 1), 11 (10 + 1), 19 (2 x 10 - 1) e 21 (2 x 10 + 1) para os elementos de outra coluna.

Vladimir Pletser, da Agência Espacial Européia, interpretou os traços como testemunho rudimentar de um povo que criou um sistema numérico e gravou o bastão segundo seus hábitos de contar – durante um jogo, ou subtraindo os dias de um calendário lunar. Esse procedimento é praticado no Ocidente, quando se contabilizam, por exemplo, as cédulas de votos, formando grupos de 5 e 10, da mesma forma que um prisioneiro vai marcando com pequenos traços, na parede de sua cela, a quantidade de dias de detenção.

A interpretação de Pletser é certamente pouco espetacular, mas corresponde bem aos dados recentes fornecidos pelos etnomatemáticos. Ele suspeita que não apenas os entalhes, mas também a forma com que foram talhados, têm um sentido. Em seu estudo, ele examina o comprimento dos traços, as distâncias entre os oito grupos e sua orientação. Exemplo: na coluna do meio *(ver figura na pág. 46)*, o segundo grupo (seis traços) contém três traços de mesmo comprimento – como os do primeiro grupo – seguido por um traço mais comprido e por um ainda maior, chegando a seis. Da mesma forma, o quarto grupo (de oito traços) é constituído por um sub-

ESCAVAÇÕES REALIZADAS perto do lago Rutanzige, na fronteira entre Uganda e Congo, no vale do rio Semliki, nos anos 1950, revelaram o bastão de Ishango grupo de três traços mais longos. Assim, cada grupo estaria subdividido.

Segundo essa interpretação, o bastão de Ishango seria um simples testemunho de um procedimento de contagem numa comunidade em que as bases 10 e 6 (ou 3 e 4) eram sempre misturadas e utilizadas juntas. Isso explica por que as somas das colunas são 60 e 48 – dois números múltiplos de 3 e de 4. Com sistemas de bases 10 e 8, teríamos, pelas mesmas razões, 80 ou 40.

Influência de Ishango

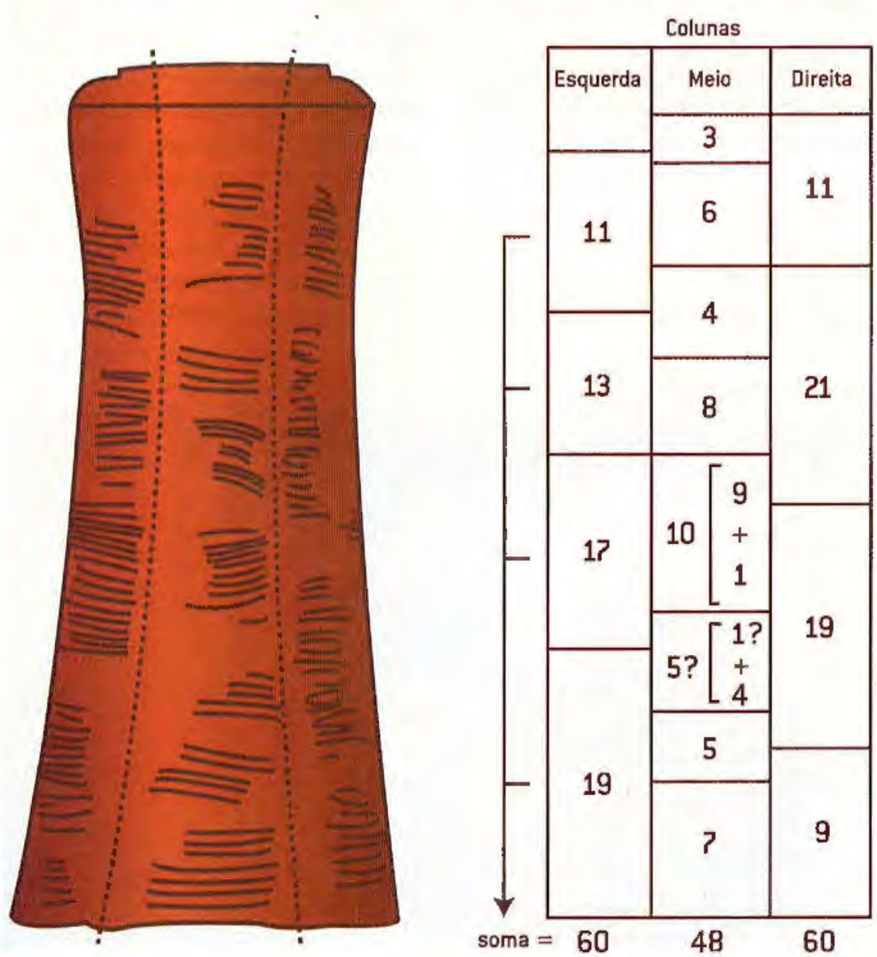
A SITUAÇÃO GEOGRÁFICA e histórica da civilização de Ishango e sua importância para a história da matemática colocam outro problema. Como um pequeno grupo de pessoas, vivendo em aparente solidão, no coração da África, às margens de um lago, 15 mil anos antes dos faraós, pôde influir (se é que pôde) sobre o saber do mundo? Especialistas acreditam que a região tinha uma aura particular e que era uma fronteira de diversos domínios científicos *(ver mapas na pág. 47)*. Hoje, o povo que ocupou Ishango – a quem devemos o bastão – é designado pelo nome de "khoi-san". Em sua grande parte, ele desapareceu, por razões diversas (clima, erupções vulcânicas e sobretudo por ter sido dizimado por outras etnias do oeste da África), mas "sobreviventes" teriam constituído os povos de Kalahari.

Para a arqueologia, a comparação entre garras de arpão encontradas em Ishango e em outros lugares do continente é ressaltada desde o primeiro relatório sobre as escavações, publicado em 1957. Um estudo comparativo foi publicado cinco anos mais tarde, na SCIENTIFIC AMERICAN, por Heinzelin. Ele destacava que o método de talhar essas pedras pontudas estava espalhado pela África central em direção ao norte, em Cartum, no Sudão, onde o sítio de Es-Shanheinab demonstra a influência de Ishango. De lá, a técnica se propagou na direção oeste, e novamente para o norte, para chegar ao sítio egípcio de Nagada. A cronologia dessas transferências de conhecimento foi estabelecida precisamente com datações de carbono 14: os dois sítios, no Sudão e no Egito, datam de 4 mil anos a.C. – ou seja, 15 mil anos depois de Ishango.

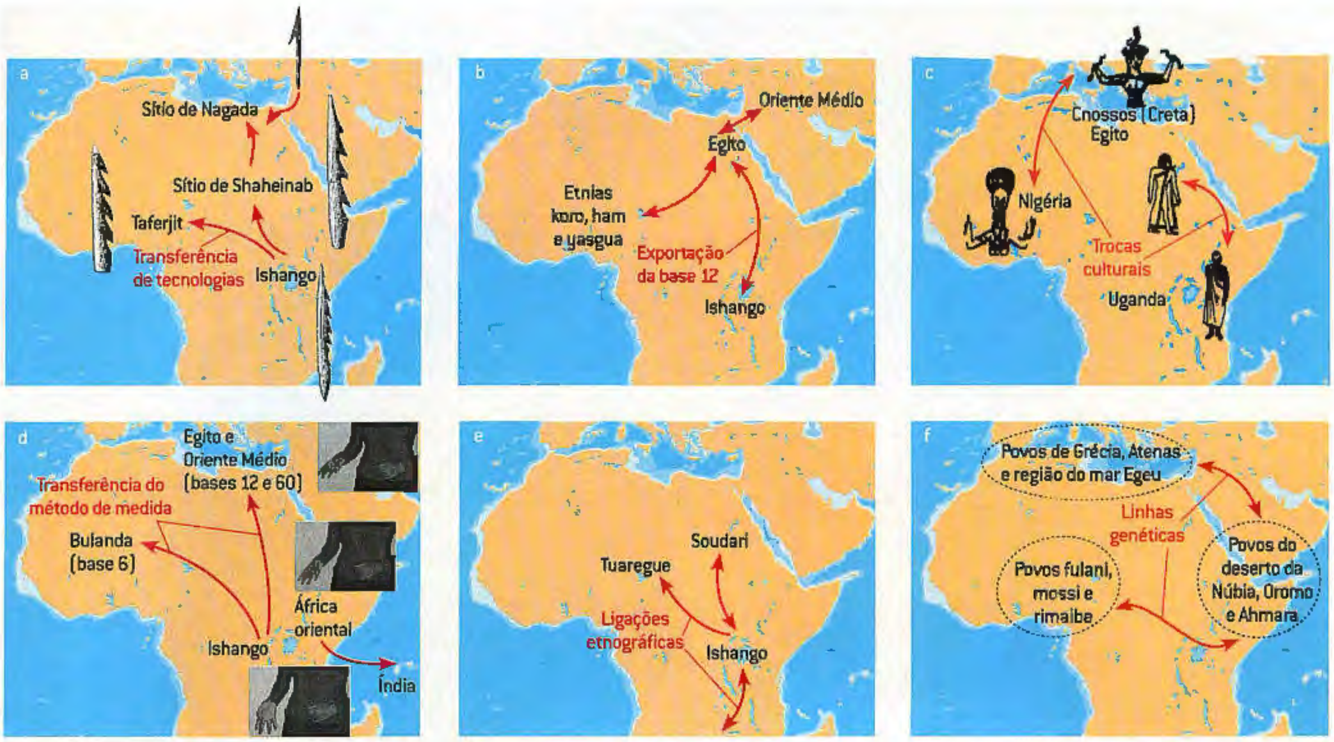
Em lingüística, uma coincidência é tocante. Em 1920, N. Thomas criou uma lista das palavras usadas para designar números na região dos yasgua, na Nigéria: 1 se diz *uniy*; 2, *mva*; 3, *ntad*...; 8, *tondad*...; 12, *nsog*; 13, *nsoi* (12 + 1); 14, *nsoava* (12 + 2); 15, *nsoatad*...; 20, *nsotondad*, etc. Os koro e os ham (também da Nigéria), notou Thomas, demonstram uma preferência parecida pela base 12. Mais tarde, outros lingüistas, como L. Bouquiaux, forneceram outros exemplos: em Birom (Nigéria), 1 é *gwinì*; 2 *bà*; 3 *tàt*; 9 *aatàt* (12 - 3); 10 *aabà* (12 - 2); 11 *aagwinì* (12 - 1); 12 *kúrú*; 13 *kúrú na gw gwinì* (12 + 1); 14 *kúrú na v bà* (12 + 2); 15 *kúrú na v tàt* (12 + 3); 20 *kúrú na v rwiit* (12 + 8); 24 *bákúru bibá* (12 x 2); 36 *bákúrú bitàt* (12 x 3); 108 *bákúrú aabitàt* (12 x 9); 132 *bákúrú aagwinì* (12 x 11) etc.

Em 1917, H. Matthews já havia constatado que as bases 12 e 10 se misturavam, em particular para os grandes números. N. Thomas questionava se teria ocorrido uma influência do Oriente Médio e do Egito – que se imaginava serem o berço dos sistemas com base 12 – no oeste da África, especialmente em uma tribo que vivia no vale do rio Semliki. "Esses povos poderiam ter desenvolvido uma preferência duodecimal de forma independente?" Cerca de 30 anos mais tarde, o bastão de Ishango, com suas três colunas com múltiplos de 12, era descoberto nas margens desse rio.

As aulas de história sobre a África começam, freqüentemente, na época colonial. Nas vezes em que o continente é mostrado antes disso, é sempre associado à imagem



DETALHE DO BASTÃO e representação estilizada dos entalhes. Alguns vêem aí um jogo aritmético. Outros, um calendário. Contudo, todos estão de acordo em dizer que o osso é a prova de que os africanos da região dos Grandes Lagos praticavam a matemática há mais de 20 mil anos



AS TROCAS entre a África, e mais particularmente a região de Ishango, com o resto do mundo, são atestadas por vários testemunhos: as técnicas de fabricação das garras de arpões *(a)* que foram exportadas de Ishango em direção ao norte e oeste da África; a base 12, que era usada no norte e no oeste além de Ishango *(b)*; as estatuetas de serpentes da Nigéria e de Creta, assim como a forma de se vestir em Uganda e no Egito, são espantosamente parecidas *(c)*; a forma de contar em base 12 com a ajuda de falanges é comum a várias regiões distantes *(d)*; ligações etnográficas foram colocadas em evidência entre diferentes populações *(e)*; e, finalmente, estudos genéticos ligam vários povos e civilizações *(f)*

de um conjunto de cabanas isoladas ao longo de um rio. No entanto, em 1976, foi levantada a hipótese de que a África negra teria influenciado o Egito dos faraós. A proposta de Anthony Noguera foi retomada em 1987 por Martin Bernal, que lançou o debate conhecido no mundo científico como "polêmica sobre a Atenas negra".

Comparando estatuetas, ferramentas, costumes e lendas, os partidários dessa Atenas negra pensavam provar que a África negra teria inspirado bastante o Egito e a Grécia. Os guias egípcios dos cruzeiros ao longo do Nilo explicam, por exemplo, a pele negra da rainha Ti como um "sinal de fertilidade".

Diante de múltiplas indicações, alguns tentam fazer ressurgir esse debate, inclusive na Europa, onde ele nunca aconteceu de fato: o bastão de Ishango é mais conhecido nos Estados Unidos que na Bélgica, país que o acolheu.

Em matemática, o eurocentrismo supõe que as origens da disciplina se situam na explosão científica grega, cuja influência foi retomada no Renascimento. Reconhece-se, às vezes, uma dívida em relação à civilização árabe, que garantiu a passagem da matemática para o Ocidente. George Joseph propôs um caminho alternativo para a matemática, incluindo contribuições de outras culturas. A emografia confirma parcialmente a tese do alcance da influência de Ishango para o sul, fundamentando-se, por exemplo, no hábito de fazer tatuagens de números. Afinal, a genética recentemente colocou em evidência as ligações entre os povos instalados ao norte de Ishango e os atenienses.

Mistério do Bastão

POR QUE A PRESENÇA de uma aritmética concreta na África central, como atesta o bastão de Ishango, e seu surgimento fora do Egito, onde se desenvolviam problemas hieroglíficos mais complicados, mas sempre fundados em dados numéricos, são tão difíceis de aceitar? Uma evolução como essa não diminuiria, em nada, o mérito da "verdadeira matemática abstrata" da geometria da Alexandria.

Os entalhes do artefato têm uma lógica inegável – ao contrário dos 57 entalhes de um osso checo datado de 30 mil anos, e das 29 marcas de uma fíbula de 35 mil anos descobertos nas montanhas entre África do Sul e Suazilândia. Até os opositores do bastão aceitam que ele seja o objeto mais antigo da matemática – esse título não é de maneira alguma contestado. Entretanto, os opositores lhe conferem pouca importância histórica: "Um pequeno osso pode se quebrar sob o peso das hipóteses que repousam sobre ele", dizem. Além disso, um osso sozinho não faz verão, nem mesmo o da matemática.

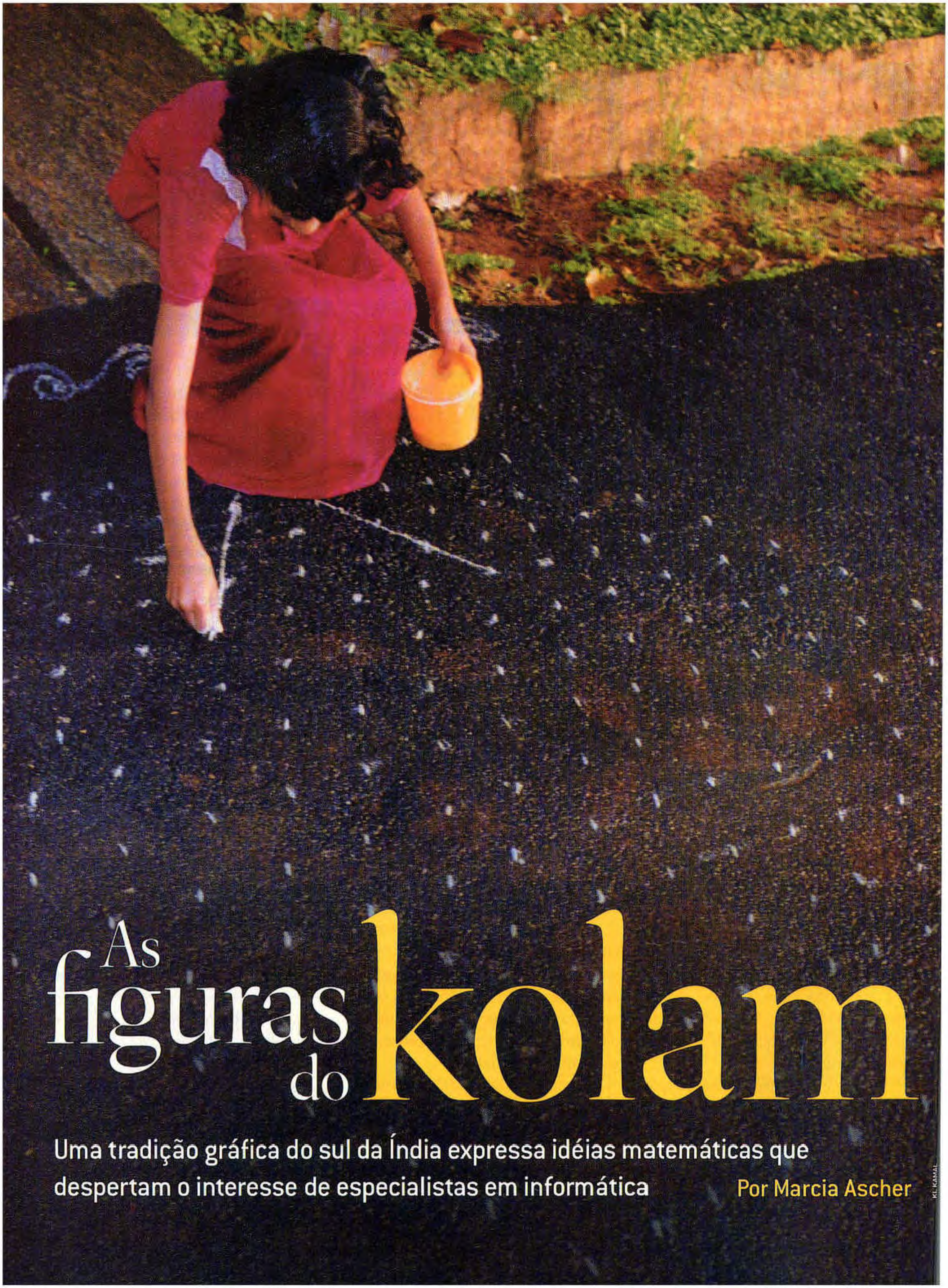
Em *2001, uma odisséia no espaço*, o diretor Stanley Kubrick foi, como sempre, visionário, ao rodar a primeira cena do filme num local parecido com Ishango. A dissolução do mistério do bastão virá talvez do próprio vilarejo. Heinzelin encontrou ali outro osso gravado, conforme declarou o arqueólogo belga em 1998, pouco antes de morrer. Só falta reencontrá-lo. SA

***Dirk Huylebrouck** é professor do Departamento de Arquitetura Sint-Lucas, em Bruxelas.*

PARA CONHECER MAIS

The Ishango Bone, the oldest mathematical object. D. Huylebrouk, em *Kadath, Croniques des Civilisations Disparues*, nº 98, págs. 25-32, 2001.

The Ishango Artifact: the Missing Base 12 Link. Ed. T. Ogawa, D. Nagy e R. Takaki. Forma, vol. 14, 1999.



As figuras do kolam

Uma tradição gráfica do sul da Índia expressa idéias matemáticas que despertam o interesse de especialistas em informática

Por Marcia Ascher

KL KAMAL

O dia desponta no estado de Tamil Nadu, no sudeste da Índia. Num vilarejo, como em todas as manhãs, as mulheres saem de suas casas e começam um estranho ritual: varrem a soleira da porta, espirram uma mistura de esterco de vaca e água, depois cobrem a área com figuras complexas elaboradas com pó-de-arroz. Segundo a tradição, o esterco de vaca limpa e purifica o solo, enquanto o pó-de-arroz constitui uma oferenda, pois é apreciado pelas formigas – é bom começar o dia com um ato de bondade.

A habilidade para executar essas figuras, chamadas de kolam, é um sinal de graça e uma prova de destreza, disciplina mental e capacidade de concentração. Os desenhos que aparecem cotidianamente nas entradas das casas de Tamil Nadu chamam a atenção em múltiplos aspectos. É um exemplo fora do comum de expressão matemática num contexto cultural. E as figuras do kolam interessam, cada vez mais, aos profissionais da informática especializados na análise e descrição de imagens.

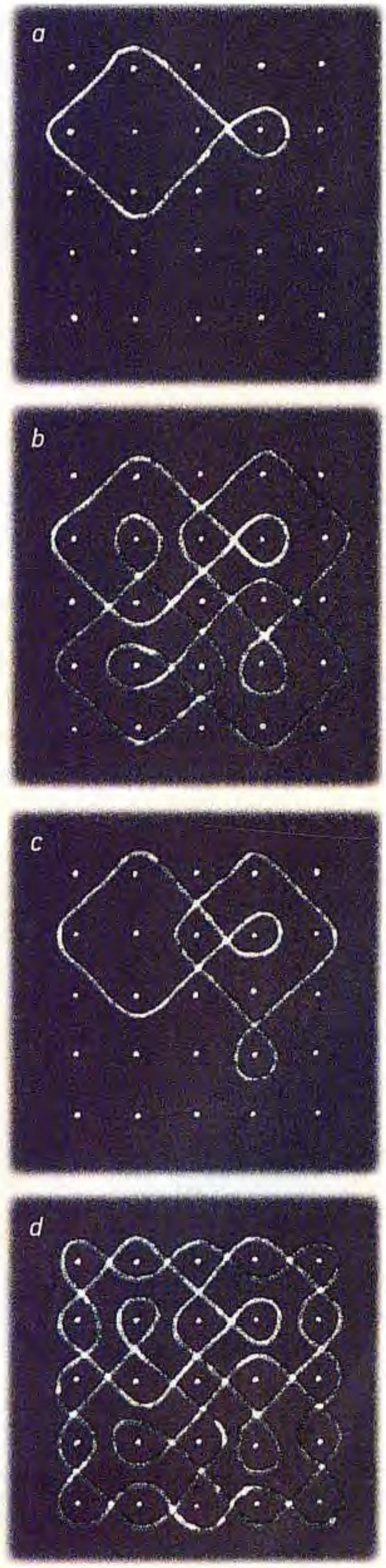
Aprendizado Feminino

A TRADIÇÃO DO KOLAM em Tamil Nadu perdura há séculos e segue como uma prática corrente entre as mulheres, sejam elas da cidade ou do campo, universitárias ou analfabetas. Contudo, nesses últimos anos, elas passaram a substituir o arroz por pó-de-pedra, disponível no comércio, giz ou tinta, para criar os desenhos – que as formigas não apreciam nem um pouco.

O traçado cotidiano das figuras é um componente importante da cultura local. As soleiras decoradas são uma fronteira entre os mundos interior e exterior, e as figuras, para a população podem, ao mesmo tempo, proteger os moradores, fazendo vigilância, e acolher os visitantes. As mulheres mais velhas da família ensinam às mais jovens todo um inventário de figuras e procedimentos para desenhá-las, além de instruí-las sobre quais são convenientes para os dias comuns e quais são reservadas para ocasiões especiais. A aprendizagem do kolam é uma parte importante da educação da menina.

Apesar de a tradição ser transmitida oralmente de mãe para filha, ela está inscrita em uma cultura escrita. Os habitantes de Tamil Nadu têm uma literatura abundante, que remonta ao século III ou IV antes da nossa era. Embora se refira ao kolam apenas superficialmente, sem entrar em detalhes, a literatura atesta a longevidade da tradição. Por exemplo: uma das referências mais antigas, um texto escrito no século XVI, descreve um reinado pacífico e próspero, onde "o tigre e a vaca bebiam na mesma fonte de água, os brâmanes cantavam os Vedas, as mulheres decoravam as ruas com kolans, chovia nos momentos oportunos e os que tinham fome eram saciados".

São encontradas em outras partes da Índia tradições de desenho comparáveis, como *muggu*, *rangoli* e *alpana*. Apesar de provavelmente serem historicamente liga-



AS FIGURAS são freqüentemente iniciadas pela criação de um geoplano ou tabela de pontos *(ver foto na página ao lado)* que prevê o tamanho e a forma final do desenho. As meninas aprendem os métodos prescritos para desenhar inúmeras figuras. Para desenhar a figura *d*, um primeiro desenho elementar (*a*) foi reproduzido três vezes, cada vez após uma rotação de 90º em relação à figura precedente (*b* e *c*). Para concluir perfeitamente a figura, a desenhista contorna os quatro desenhos elementares com uma linha curva contínua

TOM DUNNE

das, as figuras são diferentes, assim como seu significado e os procedimentos para traçá-las. Neste artigo, nos interessaremos apenas pelas imagens tradicionais do kolam, constituídas unicamente por linhas brancas, ou linhas brancas e pontos, sobre as quais se diz, às vezes, serem parecidas com tules, labirintos ou filigranas.

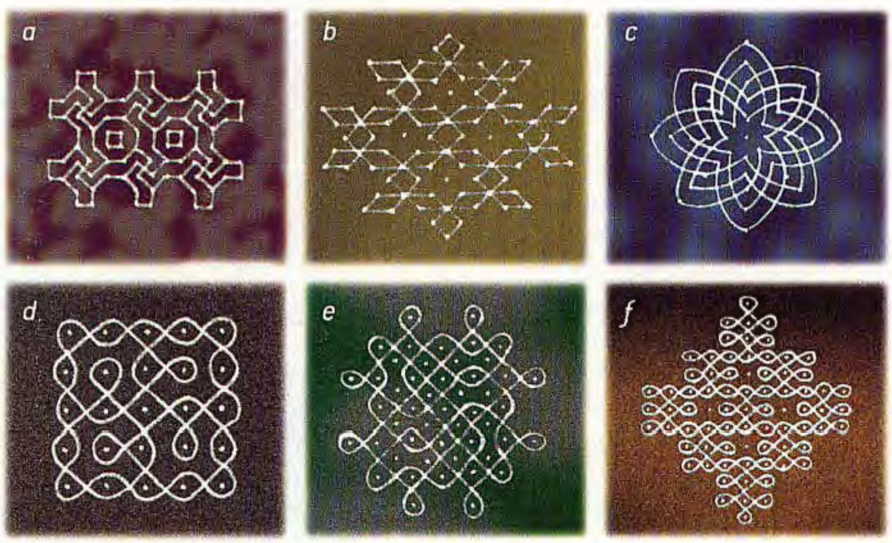
Como a prática se desloca com as pessoas que emigram de Tamil Nadu, pode-se encontrar a tradição, por exemplo, entre os trabalhadores das plantações de chá do Sri Lanka, descendentes de imigrantes que saíram de lá no fim do século XIX, ou entre aqueles que foram para os Estados Unidos.

Para fazer uma figura de kolam, o ponto de partida é freqüentemente uma tabela de pontos traçada no chão segundo uma disposição variável – por exemplo, uma rede retangular, triangular ou hexagonal. A figura é, então, desenhada, ligando-se os pontos ou contornando-os, de forma que os pontos ao mesmo tempo guiem e determinem restrições ao desenho. Esse método é o mesmo empregado pelos tshokwe, em Angola, para traçar os *sona* *(ver artigo na pág. 68)*.

Para algumas imagens, que podem ou não começar com uma tabela de pontos, é importante desenhá-las com apenas uma linha contínua, que termina no ponto onde começou. Essas figuras fechadas são associadas ao ciclo infinito do nascimento, da fertilidade e da morte, e aos conceitos de continuidade, totalidade e eternidade.

Outras figuras, como as da pág. 49, são constituídas por diversas curvas. O kolam é desenhado utilizando uma tranformação sistemática de unidade de base, que é repetida quatro vezes, de maneira que cada unidade sofra uma rotação de 90 graus em relação à precedente. Finalmente, uma outra curva fechada contínua contorna as quatro unidades. Coletivamente, os desenhos manifestam uma marcada preocupação pela simetria *(ver figuras abaixo)*.

Há também famílias de ilustrações que podem partilhar características comuns *(ver exemplo na pág. 52)*. Em alguns casos, as figuras maiores combinam várias cópias justapostas de menores. Em outros casos, os membros são derivados, uns dos outros, de forma sutil.



TOM DUNNE

ESTILOS DE FIGURAS DE KOLAM. Todos estes exemplos têm como ponto de partida um geoplano ou tabela de pontos. As figuras *a*, *b* e *c* ligam os pontos, enquanto as curvas das figuras *d*, *e* e *f* os contornam. As mulheres desenham as figuras *c*, *e* e *f* com linhas curvas contínuas fechadas, ao contrário da figura *d*, que elas traçam com cinco linhas diferentes. No entanto, uma só linha seria suficiente: cada extremidade é o ponto de encontro de quatro traços, o que basta para fazer uma figura com um só traço. Diferentes simetrias intervêm nas figuras: em torno de uma linha central horizontal ou vertical, ou de rotação em torno de um ponto central de 45° (*c*), 90° (*d*) e 180° (*e*)

Linguagem dos Desenhos

A CONCEPÇÃO E A ORGANIZAÇÃO das famílias são particularmente ricas em idéias matemáticas. Esses agrupamentos têm chamado a atenção dos teóricos da informática que trabalham com a análise e a descrição de imagens com o uso de linguagens gráficas. Essas linguagens utilizam conjuntos de unidades de base e regras formais específicas para combinar essas unidades. Esse trabalho é aparentado com a teoria formal da linguagem, que foi descoberta há cerca de 45 anos com o estudo de Noam Chomsky sobre linguagens naturais. Nas décadas que se seguiram, os profissionais da informática usaram a teoria de Chomsky na análise e na especificação das linguagens de programação.

Gift Siromoney, do Colégio Cristão de Madras, em Tamil Nadu, é o pioneiro na utilização dos desenhos do kolam no estudo das linguagens gráficas. Para ele e sua equipe – da qual faz parte sua mulher, Rani –, eles são uma fonte rica de exemplos das linguagens gráficas existentes. As figuras também estimularam a criação de novos tipos de linguagens. Outros profissionais da informática de fora do grupo de Madras buscaram descrever as famílias de figuras, como é possível ver a seguir.

Como preâmbulo, detalhemos um exemplo de linguagem formal rudimentar que produz cadeias de símbolos e vejamos como tais cadeias podem ser convertidas em imagens. Nesse caso, os símbolos são limitados a A, B e C, e nossa primeira rede é ABAA. Nossas regras para criar uma nova cadeia de símbolos a partir da precedente é B → AC, A → B e C → CC (um B numa cadeira torna-se um "AC" na nova cadeia; um A vira um B; e um C, um CC).

Conseqüentemente, se a cadeia de partida é ABAA, o primeiro resultado (ou seja, a reescritura da cadeia respeitando-se as regras) é BACBB, o segundo resultado é ACBCCACAC, e o terceiro, BCCACCCCBCCBCC. As regras da reescritura engendram resultados *ad infinitum*. A cada etapa, as três regras são aplicadas simultaneamente, ou seja, em paralelo, mais que seqüencialmente, de tal forma que, por exemplo, o A e o C introduzidos em uma etapa aplicando-se a regra B → AC permanecem imutáveis até a etapa seguinte.

Esse tipo de transformação é uma linguagem de Lindenmayer, chamada também de L-linguagem, a partir do nome de Aristid Lindenmayer, um biólogo que pesquisava a criação de um modelo de crescimento das plantas. Em nosso exemplo, a linguagem é determinista, não ligada ao contexto. Isso porque o tipo de cada símbolo é regulado individualmente, sem referência aos símbolos vizinhos; ele é determinado porque há apenas uma regra de reescrita possível para cada um dos símbolos.

K. L. KAMAL

NO ESTADO DE TAMIL NADU, no sudeste da Índia, as mães ensinam às filhas a arte de desenhar figuras que decoram a entrada das casas. A aprendizagem do traçado, em pó-de-arroz, é uma parte importante da educação das meninas há muitos séculos

O Passo das Tartarugas

PRZEMSYLAW PRUSINKIEWICZ, da Universidade de Calgary, desenvolveu técnicas que utilizam símbolos interpretados como "comandos tartaruga". Sua origem remonta aos anos 1960, quando Seymour Papert concebeu uma linguagem informática para estimular a imaginação das crianças, cuja idéia era a seguinte: uma tartaruga desenha uma imagem, deixando-se levar por sua cauda, que às vezes é levantada, para criar um desenho descontínuo. A tartaruga não tem visão global, mas ela cria desenhos com base em um conjunto de instruções simples que lhe são transmitidas por um conjunto de símbolos. Assim, "F" significa avançar um passo desenhando um traço; "f", avançar um passo levantando a cauda; "+", virar à esquerda num ângulo de x graus; "?", virar à direita num ângulo de x graus. Para cada desenho, é preciso antes especificar a direção da tartaruga e o ângulo x, que permanece o mesmo durante todo o traçado. Cada deslocamento começa no lugar onde terminou o precedente.

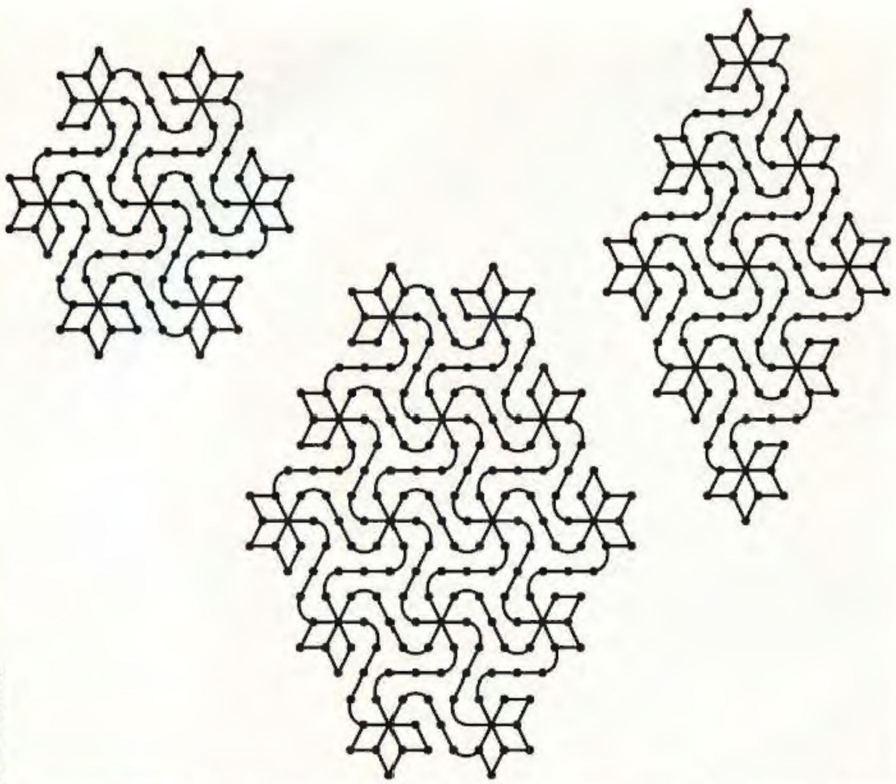
Assim, por exemplo, uma L-linguagem determinista fora do contexto interpretada no sentido da tartaruga pode reproduzir figuras da família *Serpente* (*ver ilustração na pág. 52*). Desenhada sem descontinuidade, e terminando por onde começou, uma *serpente* difere de várias outras figuras do kolam por ser desenhada sem pontos precedentes. Na interpretação com a técnica da tartaruga, obtêm-se apenas linhas retas e, portanto, uma versão angulosa do motivo. Entretanto, ao incorporar uma técnica matemática de ajuste de dados, pode-se criar uma curva arredondada, sem pontos angulosos.

As aplicações sucessivas da regra de reescrita levam a um crescimento exponencial do desenho. Se reduzirmos o tamanho dos passos da tartaruga para cada resultado, de forma que os desenhos sucessivos fiquem num quadrado do mesmo tamanho (fala-se de renormalização), e se continuarmos sem fim, teremos um resultado surpreendente: uma variante da curva fractal conhecida como curva de Sierpinski – nome do matemático que a descreveu em 1912.

Uma linguagem determinista fora de contexto foi igualmente utilizada para descrever uma outra família de figuras do kolam, os *Braceletes de Krishma* (*ver desenho na pág. 52*), cujos membros também são derivados recursivamente uns dos outros, com crescimento exponencial.

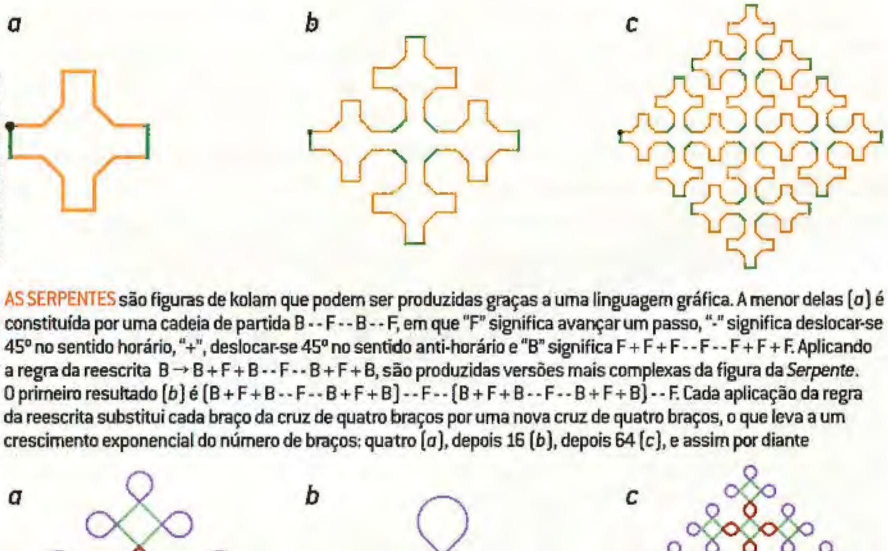
O grupo do Colégio Cristão de Madras evitou produzir versões angulosas das figuras, utilizando o que chamaram de "deslocamentos de kolam" para designar curvas e argolas lisas em vez de usar os deslocamentos lineares da tartaruga. Eles definiram sete deslocamentos baseados nas descrições das mulheres de Tamil Nadu e seus gestos. Para desenhar os *Braceletes de Krishma*, três movimentos são suficientes: "F", avançar descrevendo um traço; "R_1", avançar fazendo uma meia-volta para a direita; e "R_2", avançar fazendo uma argola completa em direção à direita.

Uma linguagem que produz os braceletes começa com a cadeia $R_1FR_2FR_2FR_2FR_1$ e comporta as regras de reescrita seguintes: $R_1 \rightarrow R_1FR_2FR_1$; $R_2 \rightarrow R_1FR_2FR_2FR_2FR_1$ e $F \rightarrow F$. Assim como na *Serpente*, em que cada aplicação da regra de reescrita substitui um braço da cruz por uma nova cruz de quatro braços, figuras de *Braceletes de Krishma* cada vez mais complexas são produzidas substituindo cada "folha" por um conjunto de quatro



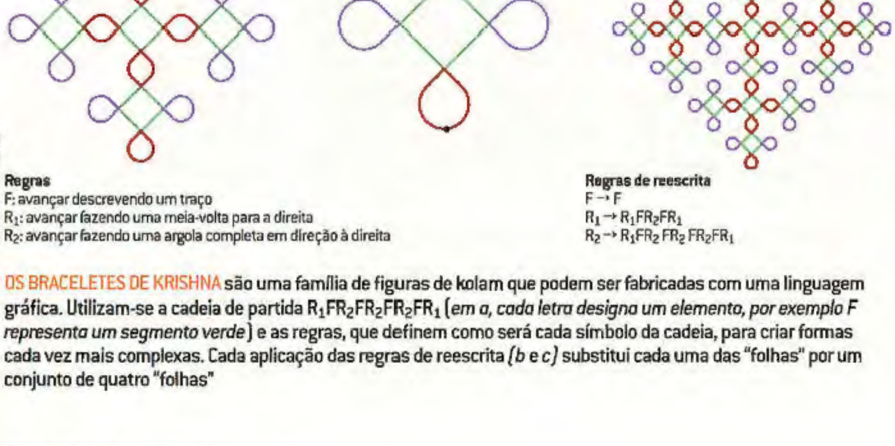
ANNETTE DeFERRARI

AS FAMÍLIAS DE KOLAM reúnem as figuras que partilham características comuns, ou são derivadas umas das outras. Essas três pertencem à família do cipó-de-parijatha [uma árvore sagrada]



TOM DUNNE E ANNETTE DeFERRARI

AS SERPENTES são figuras de kolam que podem ser produzidas graças a uma linguagem gráfica. A menor delas [*a*] é constituída por uma cadeia de partida B - - F - - B - - F, em que "F" significa avançar um passo, "-" significa deslocar-se 45º no sentido horário, "+", deslocar-se 45º no sentido anti-horário e "B" significa F + F + F - - F - - F + F + F. Aplicando a regra da reescrita B → B + F + B - - F - - B + F + B, são produzidas versões mais complexas da figura da *Serpente*. O primeiro resultado [*b*] é [B + F + B - - F - - B + F + B] - - F - - [B + F + B - - F - - B + F + B] - - F. Cada aplicação da regra da reescrita substitui cada braço da cruz de quatro braços por uma nova cruz de quatro braços, o que leva a um crescimento exponencial do número de braços: quatro [*a*], depois 16 [*b*], depois 64 [*c*], e assim por diante



ANNETTE DeFERRARI

Regras
F: avançar descrevendo um traço
R_1: avançar fazendo uma meia-volta para a direita
R_2: avançar fazendo uma argola completa em direção à direita

Regras de reescrita
$F \rightarrow F$
$R_1 \rightarrow R_1FR_2FR_1$
$R_2 \rightarrow R_1FR_2\,FR_2\,FR_2FR_1$

OS BRACELETES DE KRISHNA são uma família de figuras de kolam que podem ser fabricadas com uma linguagem gráfica. Utilizam-se a cadeia de partida $R_1FR_2FR_2FR_2FR_1$ [*em a, cada letra designa um elemento, por exemplo F representa um segmento verde*] e as regras, que definem como será cada símbolo da cadeia, para criar formas cada vez mais complexas. Cada aplicação das regras de reescrita *(b e c)* substitui cada uma das "folhas" por um conjunto de quatro "folhas"

"folhas". Várias famílias de figuras têm o mesmo princípio de crescimento.

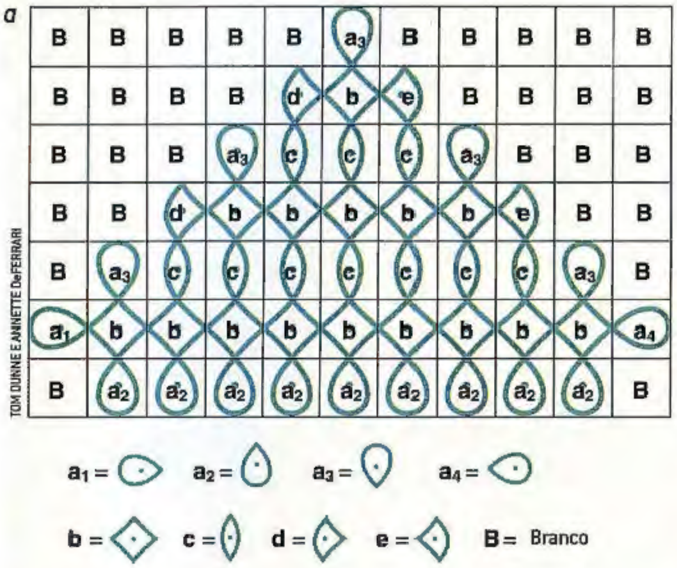
Linguagens das Redes

As LINGUAGENS GRÁFICAS descritas anteriormente são úteis para exprimir certas famílias de imagens, mas elas ignoram as redes de pontos sobre as quais se baseia a maioria das figuras de kolam e que as mulheres dispõem antes de desenhar para saber o tamanho e a forma final de cada figura. Os pontos funcionam como o esqueleto das figuras antes de elas serem desenhadas. Esse aspecto da tradição levou os especialistas do grupo de Madras a estudarem as gramáticas de redes, ou seja, redes bidimensionais de símbolos dispostas em tabelas, em vez de cadeias.

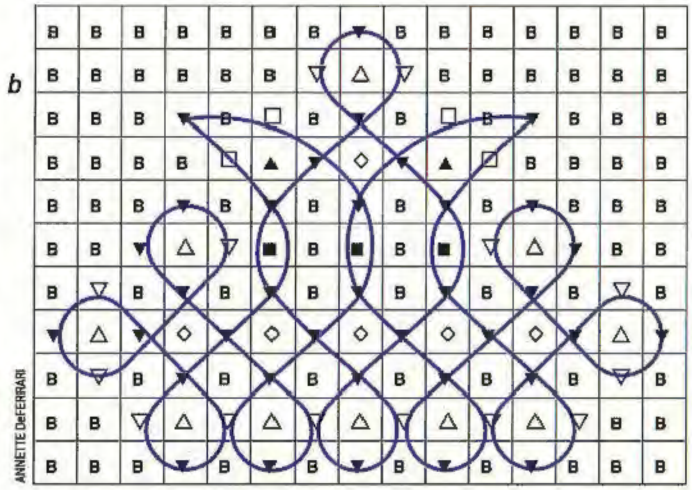
Tomando como ponto de partida as redes de símbolos, as regras de reescrita das linguagens substituem as sub-redes (subconjuntos de casas da tabela) por outras mais complexas, da mesma forma que, nas cadeias de símbolos, uma letra é substituída por várias. Entretanto, as sub-redes novamente introduzidas podem ter um tamanho ou uma forma diferente das que elas substituem, induzindo a distorções de forma na nova rede.

Nas gramáticas de rede – chamadas de matriz de Siromoney –, transformações simples de unidades de figura podem ser expressas: substitui-se um símbolo por um elemento gráfico correspondente. Esse método poderia se aplicar, por exemplo, à família de kolans da figura *a* da pág. 50, que contém a mesma unidade desenhada três vezes na horizontal e duas na vertical. A unidade de base poderia, numa outra figura, ser repetida como num espelho.

Outro tipo são as "gramáticas de rede de kolam", que se atêm à produção de figuras cujas dimensões são fixadas. Mas os pesquisadores de Madras generalizaram algumas operações elementares sobre as cadeias para aplicá-las a redes retangulares ou hexagonais. Em 1986, Rani Siromoney propôs uma análise detalhada dos trabalhos aprofundados do grupo sobre as gramáticas de rede. A análise descreveu as



TOM DUNNE E ANNETTE DeFERRARI



ANNETTE DeFERRARI

Regras

1. Unir os dois ▽ por um arco, passando por um ▼ e em torno de um △
2. Unir os dois ▼ mais próximos por uma linha reta [para formar um losango em volta dos ◇]
3. Unir os ▼ rodeando os ■ por dois arcos
4. Unir dois ▼ passando por um □

LINGUAGENS DE REDE podem criar figuras de kolam da família do *Topo da Montanha* [*a*], que têm crescimento polinomial, em vez de exponencial. Nessa linguagem, os símbolos de uma rede retangular [*as letras*] são interpretados como unidades de figuras contíguas [*em verde*]. Aqui, as unidades de figura são sobrepostas na rede simbólica. Outra linguagem de rede permite desenhar os membros da mesma família [*b, em azul*], interpretando os símbolos das redes [*as letras e as formas geométricas em preto e branco*] como pontos que trazem instruções específicas

diversas facetas exploradas pelo grupo e as ligações de seu trabalho com os de outros especialistas. O essencial do trabalho reside nas propriedades formais dos tipos de linguagem propostos, e algumas delas se aplicam às famílias de kolans.

O grupo de Madras utilizava dois métodos distintos de interpretação gráfica das redes simbólicas criadas pelas linguagens de rede. Uma delas interpreta os símbolos contidos nas casas de uma rede retangular como unidades de figura contíguas (*ver acima*). Os conjuntos específicos de unidades variam de uma linguagem a outra, pois dependem da família de kolam descrita. Para criar diversos membros, as regras de produção das redes sucessivas devem capturar a organização inerente das unidades de figura de uma dada família.

O segundo método de produção de desenhos graças às redes simbólicas se aproxima dos procedimentos utilizados pelas mulheres de Tamil Nadu. Nessa técnica, os símbolos das redes são representados por pontos, que podem trazer informações para guiar o traçado das figuras (*ver figura acima*). Os tipos de pontos e suas instruções variam de uma linguagem a outra e eles também são específicos da família de kolans descrita. Para compor os membros da família, as regras de criação de redes sucessivas devem igualmente capturar a organização em motivos de pontos que trazem instruções.

Natureza Algorítmica

Caçando a essência das figuras do kolam, e armados com linguagens gráficas, os especialistas em informática iluminaram a riqueza das estruturas e sua natureza algorítmica, ou seja, sua construção ordenada passo a passo. Essas linguagens não traduzem necessariamente a forma como as mulheres concebem e desenham as figuras. No entanto, eles ressaltam que o kolam, e em particular as famílias de figuras, não são simples coleções de desenhos individuais: procedimentos e técnicas sistemáticas os unem.

Esta tradição também forneceu uma abertura única para a informática. Talvez não exista melhor maneira de examinar uma construção intelectual do que aplicá-la em dois exemplos escolhidos fora da cultura em que o conceito foi descoberto. Além disso, os pesquisadores procuraram aprender com as desenhistas e integraram ao que aprenderam na teoria e na prática de seu próprio domínio. Essa análise ilustra como as idéias matemáticas podem sair de suas fronteiras tradicionais, interagir com um projeto universitário e lhe trazer uma contribuição.

A matemática está, sem dúvida alguma, no coração da tradição do kolam, que dá bastante importância à simetria, à repetição dos motivos, às curvas contínuas fechadas e às famílias de curvas. São as mulheres que concebem e executam as figuras, cada uma na soleira de sua porta, e introduzem variações infinitas cujas noções intrínsecas são transmitidas de geração a geração. Esta tradição faz certamente parte da história global e da evolução das idéias matemáticas, mas continua a ser, antes de tudo, um elemento central da vida cotidiana em Tamil Nadu. SA

Agradecemos à revista American Scientist *a permissão de reproduzir este artigo.*

***Marcia Ascher** é professora emérita de matemática no Ithaca College.*

PARA CONHECER MAIS

Mathématiques d'ailleurs. Marcia Ascher, Ed. Le Seuil, 1998.

Uma cultura indígena impregnada de matemática

Os índios utes do norte, nos Estados Unidos, não têm palavras para designar a matemática. No entanto, ela está presente em suas tradições, sob aspectos individualizados na relação com o corpo

Por Jim Barta e Tod Shockey

"A matemática também faz parte de nosso modo de vida, mas nós não a praticamos como o homem branco (...) com tábuas de multiplicação, adição ou subtração. Nós temos essas coisas em nossas técnicas tradicionais de bordados de miçangas, na criação dos nossos cavalos e rebanhos, na construção de barreiras, na nossa maneira de erguer as tendas etc."

Fabian Jenks, ancião ute.

As culturas nativas americanas são pouco reconhecidas por seu saber matemático. Entender como esses povos aplicam tais conhecimentos específicos nas práticas da vida cotidiana pode melhorar nossa compreensão sobre elas.

Vamos ver isso em detalhes com os utes do norte, uma tribo da qual sobraram apenas 3 mil representantes, espalhados em um território subdividido em três faixas nas proximidades do rio Uintah, no nordeste de Utah – estado que deve seu nome aos índios utes, nos Estados Unidos. Os anciãos tornaram-se os únicos detentores dessa cultura tradicional, pela qual quase todos os aspectos da vida cotidiana têm uma dimensão espiritual. Os utes demonstram humildade e respeito diante da vida, das plantas e dos animais, com os quais lhes é determinado partilhar a terra.

Ameaçada por muito tempo, esta cultura está em vias de renascer, graças aos esforços empregados para salvar suas práticas. As crianças estão aprendendo de novo a língua de seus ancestrais e os costumes de seu povo.

Resumir a história e o conteúdo dessa cultura é um desafio ousado, pois eles certamente não se limitam ao que sabemos, mas vamos relatar neste texto diversos aspectos importantes.

Esse povo viveu durante séculos em toda a região das Montanhas Rochosas, no oeste dos Estados Unidos, num território situado onde hoje estão o Utah e o Colorado. Os utes eram conhecidos pelos nomes que eles mesmos se davam, *nuciu*, o que significa, em sua língua, "o povo". Eles viviam e viajavam em pequenos bandos

JOVEM NATIVO americano apresenta dança típica durante festival cultural do oeste do país, em Utah

(contavam-se 12, diferenciados por hábitat), grupos de famílias ampliadas, de 20 a 100 indivíduos. Na época, esses bandos se reuniam para fazer comércio, casar, participar de cerimônias e celebrações, ou realizar caçadas em grande escala, para obter alimento em quantidade.

Os deslocamentos dos utes através de seu território obedecia a ciclos sazonais, permitindo-lhes apanhar ou colher grãos, nozes, frutos, raízes e plantas medicinais. Os caçadores acrescentavam ao menu coelhos, aves, peixes ou grandes peças de caças, como o bisão.

As casas temporárias (*wickiups*) tinham o formato de um cone e eram feitas de matérias de fácil acesso, como ervas e galhos. Durante a estação de frio, quando os deslocamentos diminuíam e os locais de habitação tornavam-se mais permanentes, eles construíam cabanas cobertas de peles de animais e fabricavam cobertas quentes com pele de coelho.

No começo dos anos 1700, quando os utes adquiriram cavalos, trazidos pelos exploradores espanhóis, sua vida mudou completamente. As viagens ficaram mais rápidas, as caçadas, mais eficazes. Eles também podiam se lançar "com tudo" sobre os inimigos – os principais eram os índios navajos. Em pouco tempo os utes se tornaram célebres por seus talentos como cavaleiros e suas conquistas guerreiras.

A partir de 1847, o estilo de vida tradicional mudou, com a chegada dos mórmons que, em busca de novas terras para praticar sua religião sem entraves, entusiasmaram-se com esses territórios que não pertenciam, aparentemente, a ninguém, e começaram a construir ali cidades permanentes.

No começo pacíficas, as relações entre os utes e os mórmons envenenaram-se: as fontes que os indígenas mantinham e utilizavam havia séculos lhes eram, naquele momento, contestadas. Estouraram violentos conflitos, a ponto de o exército intervir e forçar os utes a se renderem.

Em seguida, eles foram confinados em reservas estéreis, criadas pelo governo dos Estados Unidos, e sofreram um processo de aculturação. Os adultos tiveram de aprender técnicas de agricultura e criação, e as crianças eram enviadas para pensionatos, onde aprendiam inglês. Esse "processo educativo" perturbou a prática da cultura tradicional e impediu a transmissão das tradições. Só recentemente passou-se a investir na salvação dessa cultura.

Na língua dos utes, nenhuma palavra específica designa a matemática. Ela é algo que se pratica no cotidiano. Os conceitos só transparecem nas suas diversas utilizações. Para esse povo, a matemática é um verbo, em vez de um substantivo, ao contrário da perspectiva eurocêntrica. Alguns consideram-na como um dom do Criador, cuja exploração permite uma vida bem-sucedida.

Contar: *nee nee aye*

A TRADIÇÃO MATEMÁTICA dos utes começa pelo ato de contar. Originalmente o sistema de numeração reunia objetos e eventos da vida cotidiana em grupos de 10 (aproximadamente). Um número exato não lhes parecia necessário para descrever essas porções, e os utes se contentavam em descrevê-las com termos como "um grande número", "muito" ou "alguns".

Contudo, os valores de um a infinito podiam ser descritos. Zero significava *não ter nada* ou *não tem mais*. Para quantidades muito grandes a serem contadas, dizia-se que elas *continuavam ainda mais e mais*, ou então eram denominadas como *aquelas que não têm fim*. Já os valores que iam de algumas dezenas a algumas centenas eram mais freqüentemente explicitados *(ver quadro abaixo)*, em razão de sua utilização prática. Números extremamente altos só eram ditos com exatidão quando isso era indispensável.

Gestos de mão, comparáveis aos usados para contar nos dedos, acompanhavam a enumeração verbal ou eram utilizados separadamente. Para valores superiores a 10, o interlocutor indicava verbalmente o valor, o número de dezenas ou centenas, antes de fazer os gestos para completar as unidades. Mas o contexto da conversa tornava esse tipo de esclarecimento muitas vezes supérfluo.

Onze, doze etc., significavam, literalmente, "um acima de dez", "dois acima de dez", etc. Vinte ou trinta eram formados por "dois grupos de dez", "três grupos de dez". Nove era "um a menos que dez", e essa designação permanecia para todos os outros números que precediam imediatamente uma dezena – um pouco como ocorre com os números romanos, sem no entanto haver algarismo escrito para eles. Os desenhos de objetos sobre peles ou pedras indicavam também as quantidades, e sistemas de entalhes podiam ser usados para fazer uma conta.

Os anciãos dos utes descreviam por imagens as operações matemáticas básicas de adição (combinar), subtração (retirar) e divisão (partilhar ou repartir). Acrescentar de forma repetida a mesma quantidade equivalia a multiplicar. As divisões ou frações se inscreviam no contexto da partilha de bens – a comida, por exemplo –, e os cálculos eram intuitivos. Qualquer um podia receber "uma metade" do butim, enquanto outro podia receber outra porção do que restasse. Partes iguais não significavam sempre que cada um recebia a mesma quantidade, mas que cada um recebia o que ele e sua família precisavam. "Um meio" era expresso por "ao meio ou ao centro".

Medir: *tuehgyh*

MAIS QUE CRIAR UM conjunto de unidades padrão, os utes utilizavam medidas contextualizadas e individuais. Um bastão, ou um pedaço de correia, tinham um comprimento próprio que poderia servir de referência para uma comparação com outro objeto. Como dizia um ancião: "Qualquer construção tinha, nela mesma, a sua medida". As partes do corpo, como as mãos e o comprimento do braço estendido, eram medidas pelo tanto de unidades específicas da pessoa que as definia. Em outros termos, cada indivíduo trazia em si suas próprias unidades e, por conseqüência, o que construía estava na proporção de seu corpo. As camisas, os vestidos de pele de corça, os mocassins e até as ferramentas e armas eram confeccionadas com base nas medições do beneficiário. Roupas customizadas para o dia-a-dia.

O perímetro, a área e o volume eram medidos de forma prática. Por exemplo, uma pessoa que construía um abrigo para proteger sua família do sol ardente media o terreno e contava o número de passos necessários para obter o tamanho da casa que

1. suwees
2. wyanee
3. bpaynee
4. whcheweenee
5. muhnugheenee
6. nahvayannee
7. nahvakahvuhnnee
8. wowh whcheweenee
9. suwah turgumsuweenee
10. turgumsuweenee
11. turgumsuweenee soocoos cheepeewahgudt
12. turgumsuweenee wykh cheepeewahgudt
13. turgumsuweenee bpaykwh cheepeewahgudt
14. turgumsuweenee whchook cheepeewahgudt
15. turgumsuweenee muhnuhgk cheepeewahgudt
16. turgumsuweenee nahvayouk cheepeewahgudt
17. turgumsuweenee nahvaykahvahouk cheepeewahgudt
18. turgumsuweenee wowh whchook cheepeewahgudt
19. turgumsuweenee suwah turgurmsok cheepeewahgudt
20. wahmsuweenee
30. paymsuweenee
40. whchewee turgumsuweenee
50. muhnuhgkee turgumsuweenee
60. nahvah muhnugheenee
70. nahvahkahvah turgumsuweenee
80. wowh whchewee turgumsuweenee
90. suwah turgurmsuwe turgumsuweenee
100. sookoosmurh

A NUMERAÇÃO DOS UTES é feita pela base 10. Esse número serve como ponto de base para a expressão dos números. Por exemplo: 9 se diz "10 menos 1", 12 se diz "10 mais 2" etc.

convinha a sua família. A área do chão de uma casa ou de uma cabana correspondia à função para a qual ela era construída.

As distâncias eram descritas em função do tempo e da velocidade necessários para fazer a viagem. Um longo périplo era "medido" pelo número de pores-do-sol que se sucediam durante a viagem. A luz do dia era importante: era mais fácil e mais seguro viajar durante o dia, e o pôr-do-sol marcava, então, o fim do dia de viagem. Os viajantes segmentavam um trajeto em partes, baseadas na duração do dia. A velocidade da viagem (a pé ou a cavalo) influía sobre a "distância" percorrida, tornando a viagem mais curta ou mais longa.

O volume era a quantidade que um recipiente ou uma taça poderia conter. O peso de um objeto era sempre descrito em relação à pessoa que o carregava ou o erguia. Era quem determinava se, para ela, o objeto estava pesado ou leve.

Para a cozinha, a medida tinha também um papel importante. Quem preparava o jantar utilizava como unidades padrão pitadas, punhados ou gotas de ingredientes, tais como frutos esmagados, sal e outros temperos. O tamanho do recipiente também servia como medida. O cozinheiro experiente sabia que uma tal tigela ou recipiente, preenchida até certo nível, produziria uma quantidade específica de comida. Para alimentar mais gente, teria de encher um pouco mais o recipiente.

OS UTES habitam as fronteiras entre os estados de Utah e Colorado. Por muito tempo viveram como nômades, movimentando-se ao ritmo das estações do ano, mas hoje são sedentários e vivem em reservas onde tentam preservar sua cultura e conhecimento matemático

Desenhar: *pur ur kut*

OS DESENHOS TRAZEM em si mensagens e contam histórias. Assim, um bordador de miçangas ute podia utilizar contas de cores e motivos específicos de uma flor ou de uma forma geométrica que foram transmitidos de geração em geração.

Os cálculos estavam inseridos no trabalho com as miçangas, que eram usadas para decorar as vestimentas e os objetos da vida cotidiana *(ver imagem na pág. 58)*. Os utes eram bastante conhecidos por esse tipo de artesanato, e a matemática funcionava como guia para essa confecção. O equilíbrio dos motivos em miçangas reflete interpretações espirituais. Acredita-se que eles ilustram a harmonia, a alegria e a beleza e traduzem uma vida bem-sucedida.

As formas eram nomeadas por suas características geométricas, mas também em referência à aparência física de qualquer coisa real. Por exemplo, um triângulo podia ser descrito como "objeto com três cantos". Os movimentos da mão completavam a expressão verbal e podiam indicar o comprimento e a largura. O círculo, conhecido pelo nome de "qualquer coisa redonda", era talvez a figura geométrica mais importante para os utes, provavelmente porque o círculo não tem nem começo nem fim e ilustra os múltiplos círculos que cada um pode observar, tais como os ciclos da vida, do clima, da lua e das estrelas.

Esta era também a forma mais utilizada para as casas tradicionais. Os utes sabiam que, para um perímetro determinado, uma casa circular é aquela que tem a maior superfície. Os materiais de construção eram retirados da Natureza, e a otimização das construções circulares reduzia o impacto sobre o ambiente e a quantidade de trabalho requisitada para coletar esses materiais.

Situar: *myh*

Os anciãos eram respeitados por seu conhecimento sobre a Terra, sua geografia, sua geologia e suas fontes naturais. Os "mapas" de outras viagens presentes em suas memórias guiavam grupos de viajantes ou descreviam oralmente alguns marcos específicos e as distâncias atingidas. Na época, mapas que representavam um itinerário podiam ser desenhados sobre o chão ou sobre peles, com carvão.

Os pontos cardeais eram determinados em função do nascer e do pôr-do-sol, a localização de uma montanha ou qualquer outro ponto notável. Sinais feitos à mão indicavam a direção e eram aparentemente utilizados de forma sistemática para descrever uma localização a alguém. Os utes se situavam também observando atentamente a posição do sol nascente, da lua e das estrelas. Esses astros permitiam também determinar a época do ano e os acontecimentos suscetíveis de serem produzidos, tais como a volta de animais ou de plantas e as condições meteorológicas. A sobrevivência dependia desse conhecimento do meio.

Pictogramas e petróglifos – desenhos feitos sobre paredes rochosas (*ver imagem na pág. 59*) – constituíam os meios de comunicação com pessoas que haviam acampado e caçado nos mesmos lugares. Alguns sinais e símbolos representavam características geográficas e das fontes naturais. As orientações topográficas (direita e esquerda, em cima e embaixo etc.) eram especificamente descritas onde um objeto se encontrava em relação à pessoa que lia as instruções. Lá também o contexto da observação dependia da descrição.

A matemática é uma forma de comunicação de idéias e constitui, portanto, uma forma de explicar. Os números 4 e 7 tinham um significado particular para os utes, encontrado nos comportamentos culturais, na construção e no desenho. O 4 podia indicar as direções cardeais ou quantas vezes era preciso repetir uma reza, uma cerimônia ou um canto. Um ancião, descrevendo a importância do 7, declarou: "Os sete são o norte, o oeste e o sul, e depois temos o céu e a terra, e então o meio seria nós mesmos, nossos corações – e são essas as sete direções".

Explicar: *os kueh uhm*

A hora era indicada pelo comprimento da sombra de um bastão plantado ou de um objeto natural e a direção para a qual ela apontava. Uma sombra dirigida para o oeste de manhã confirmava que estavam antes do meio-dia. Uma medida exata da hora não era necessária. As atividades e as ações de uma pessoa ao longo de um dia ou da noite eram explicitadas em função da posição do sol ou da cor do céu.

ESTES MOCASSINS, assim como muitos objetos da vida cotidiana dos utes, são feitos com miçangas bordadas seguindo motivos geométricos

O calendário ute era lunário. Uma observação atenta do ciclo de nosso satélite lhes indicava com precisão a época do ano e até o estágio da noite. Uma nova lua coincidia com um novo mês. Essas informações eram vitais para determinar, por exemplo, o momento adequado para colher os frutos, desenterrar as raízes, colher as plantas, caçar os animais e secar as carnes.

Havia quatro estações e, durante cada um desses períodos, alguns eventos isolados representavam os meses. Entre esses acontecimentos, citemos o período de acasalamento das águias, as migrações dos pássaros, o brotamento das plantas, a eclosão das flores etc.

A fortuna e o status eram ilustrados pelo número de cavalos ou de cabeças de gado, mas não eram determinados unicamente pelas posses materiais. Um ute parecia rico aos olhos de seus congêneres quando possuía alguns talentos apreciados, como saber fazer bordados de miçangas, cantar ou dançar. O status se elevava de acordo com seu conhecimento dos costumes tradicionais, da humildade de sua vida, da sua habilidade para alimentar a família, de sua capacidade de escutar os sábios anciãos, de confeccionar as vestimentas tradicionais etc.

Jogar: *keeyakyh*

O gosto pelo jogo era valorizado. Em alguns tipos, a utilização da matemática só servia para contar os pontos. Em outros, ela fazia parte das atividades. Entre os diversos aspectos matemáticos que podiam se encontrar nos jogos, citemos as noções de medida, de numeração e de probabilidades. O número de pontos designava os ganhadores.

Alguns jogos demandavam aptidões físicas, como corrida a pé, arco e flecha ou o *shinny* (parecido com o hóquei sobre grama), outros eram mais cognitivos.

Era o caso do "jogo de mão ou do bastão", de adivinhação, que era disputado entre duas equipes constituídas por um número qualquer de homens e mulheres unidos dentro de uma área delimitada no chão por dois longos bastões colocados paralelamente. Cada equipe começava o jogo com 10 ou 12 pequenos pedaços de pau e vários ossos. Um deles era en-

OS PETRÓGLIFOS que os utes deixavam sobre algumas paredes de pedra constituíam um meio de comunicação e informavam aos novos visitantes sobre as características geográficas e a localização das fontes naturais na região

rolado por uma correia. O objetivo do jogo era adivinhar em qual mão um dos jogadores da equipe adversária escondia o osso branco (sem correia). Quando a equipe adversária tivesse adivinhado, a equipe perdedora passava a ela um de seus pedaços de pau. A primeira equipe que conseguisse ficar sem pedaços de pau perdia a partida, assim como a aposta que precedia o jogo. Apostavam-se peles, objetos pessoais e até cavalos.

O jogo do *tu-roo-kweep* era disputado sobre uma pele de corça com quatro bastões. Cada um era pintado (ou gravado) por uma combinação diferente de cores (ou de marcas), representando valores numéricos combinados pelos jogadores. Eram desenhados ou pintados marcadores sobre a pele de corça ao longo das margens. Colocava-se uma pedrinha no meio. Os jogadores, sentados, ficavam na frente um dos outros, com a pele de corça entre eles. Eles jogavam, cada um de uma vez, tentando fazer os bastões atingirem a pedra. O escore dependia da forma como os bastões aterrissavam, e os jogadores deslocavam os marcadores, em torno da pele de corça, de acordo com os pontos feitos. Ganhava a partida aquele cujo marcador fizesse primeiro um giro completo em torno da pele.

Esse breve apanhado das tradições dos índios utes reflete a aplicação de conceitos e princípios matemáticos por um povo cuja existência dependia dela. A criatividade e a inteligência matemática que eles atestavam ter indicam serem eles um povo com uma herança rica, que também utilizava a matemática para tornar sua vida e sua cultura agradáveis. Hoje, graças à consciência e à compreensão dessa tradição matemática, as crianças utes se dão conta de que, ao honrar e perpetuar as tradições de seus ancestrais, aprendem e utilizam a matemática.

Os autores agradecem aos anciãos utes por terem transmitido a eles seus saberes, e especialmente Lillian Reed, Fabian Jenks, Cameron Cuch e Venita Taveapont. SA

Jim Barta *é professor da Universidade do Estado de Utah, e Tod Shockey, da Universidade do Maine.*

PARA CONHECER MAIS

Mathematics and beadwork. Jim Barta, em *Winds of Change*, American Indian Science and Engineering Society, vol. 14 (2), págs. 36-41, 1999.

The Multicultural Math classroom. C. Zaslavsky, em *Bringing in the World*, Portsmouth, Heinemann, 1996.

Mathematical enculturation. A. Bishop, em *A Cultural Perspective on Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

Música e ritmos na África central

HARPA ZANDE de cinco cordas. Instrumento usado para acompanhar rituais de canto na África central

Alguns poetas africanos fazem o acompanhamento de seu canto pelo toque de uma harpa, através de seqüências musicais que somente os matemáticos conseguem apreender

Por Marc Chemillier

Na tradição musical erudita ocidental – o mesmo é válido para as tradições não ocidentais, como, por exemplo, na China –, a música foi sempre associada à matemática. Em contrapartida, nas sociedades desprovidas de escrita, essa associação parece mais surpreendente. Descreveremos aqui, entretanto, alguns casos de repertório musical em sociedades de tradição oral, nos quais nos é permitido colocar em evidência estruturas musicais complexas, comparáveis a construções matemáticas.

Esses exemplos abrem um campo de estudos novo e importante de pesquisas etnomatemáticas. Até hoje as pesquisas só têm se debruçado sobre as artes visuais, analisando a simetria de figuras ornamentais e a topologia de traçados lineares, já que essas propriedades formais são mais "visíveis" do que as propriedades por definição "invisíveis" da música.

Os povos nzakara e zande, aparentados pelas línguas que falam, ocupam um território que se divide entre a República Centro-Africana, a República Democrática do Congo e o Sudão. No século XIX eles formavam diferentes reinos, mas as tradições musicais nzakara e zande são aparentemente comuns, em especial no que diz respeito à utilização da harpa de cinco cordas.

O acompanhamento musical ao canto era feito pelos poetas-músicos nzakara e zande por meio de "fórmulas" tradicionais, ou seja, seqüências de notas tocadas na harpa de cinco cordas *(ver foto na pág. ao lado)*. Esse instrumento, do qual alguns belos exemplares antigos foram conservados em museus, eram muitas vezes ornamentados com magníficas cabeças esculpidas.

Os Cânones dos Nzakara

As FÓRMULAS DE HARPA são repetidas circular e ciclicamente, para acompanhar uma improvisação poética cantada. A harpa é segurada verticalmente e as cordas são tangidas duas a duas (cada mão, uma corda). O ritmo dessas fórmulas é regular e se baseia numa pulsação subjacente, oculta, quer dizer, numa divisão do tempo em unidades iguais geralmente subentendida, algumas vezes materializada por batidas de mão ou pelo tilintar de guizos *winga*.

Nós representamos *(ver ilustração 1)* as fórmulas por meio de cinco linhas horizontais, que correspondem às cinco cordas do instrumento, sobre as quais os pontos indicam as cordas pinçadas durante a execução da fórmula. As cordas, sempre pinçadas duas a duas, formam duas linhas melódicas sobrepostas, uma sobre três cordas agudas (as três cordas próximas de quem toca) e a outra sobre três cordas graves (a do meio sendo comum aos dois trios definidos). À parte algumas raras exceções, os dois perfis melódicos são idênticos, mas tocados em intervalos de tempo diferentes, não simultâneos. Trata-se, portanto de um cânone, no sentido próximo do da musica ocidental.

Exceções à Regra

ESSA INTERPRETAÇÃO, porém, revela alguns "erros", ou seja, algumas exceções à regra do modelo. A distância do cânone é o número de duplas de notas que separa o início da voz grave do início da voz aguda (a distância tem respectivamente os valores 6, 4 e 4, nas três fórmulas da ilustração 1). Com um intervalo próximo da distância do cânone, essa voz obedece ao mesmo perfil melódico, mas ela é transposta para as cordas mais graves.

Quando formalizamos matematicamente o problema da construção de tais modelos, nos damos conta de que é impossível fabricar uma seqüência de harpa que seja um cânone no sentido estrito do termo, ou seja, sem nenhuma exceção na reprodução, por uma voz, do perfil melódico da outra. Essa impossibilidade é conseqüência de dois aspectos incompatíveis, uma determinação "horizontal", imposta pela identidade dos perfis melódicos e uma determinação "vertical", que proíbe alguns pares simultâneos de cordas. Na verdade, no repertório nzakara ilustrado por essas fórmulas de harpa, as cordas que são colocadas lado a lado no instrumento jamais são tocadas juntas, e o mesmo acontece com as cordas laterais, em ambas as extremidades. Se dispusermos as cinco cordas da harpa num círculo, juntando as que podem ser pinçadas simultaneamente, obteremos uma figura geométrica simétrica, com o formato de uma estrela de cinco pontas *(ver ilustração 2)*.

A estrutura do cânone leva a que, numa fórmula de harpa, as duplas de cordas simultâneas que estão a uma dada distância temporal (a do cânone) estejam de acordo com uma relação particular. Essa relação, que garante de modo global a reprodução, pela voz grave, do perfil melódico da voz aguda, se exprime localmente no nível dos encadeamentos de um par a outro. Se numerarmos 0, 1, 2, 3, 4 os cinco pares de cordas tocadas simultaneamente (começando pelo grave, ou seja, de modo a que o 0 designe o par formado pela corda mais grave e pela corda do meio), a relação de encadeamento de um par a outro na distância do cânone se traduz pelo gráfico da ilustração 2. Nós o lemos da seguinte forma: a dupla de notas 1 se faz necessariamente seguir, n pares adiante, do par 2 ou 3, para que um cânone com distância igual a n seja possível.

A flecha suplementar nesse gráfico (de 4 a 0) contraria a regra do modelo, mas esse encadeamento é efetivamente utilizado pelos músicos nzakara em suas fórmulas de harpa, e é ele que produz os "erros" que descrevemos anteriormente, ou seja, pontos nos quais a voz grave não se segue à voz aguda.

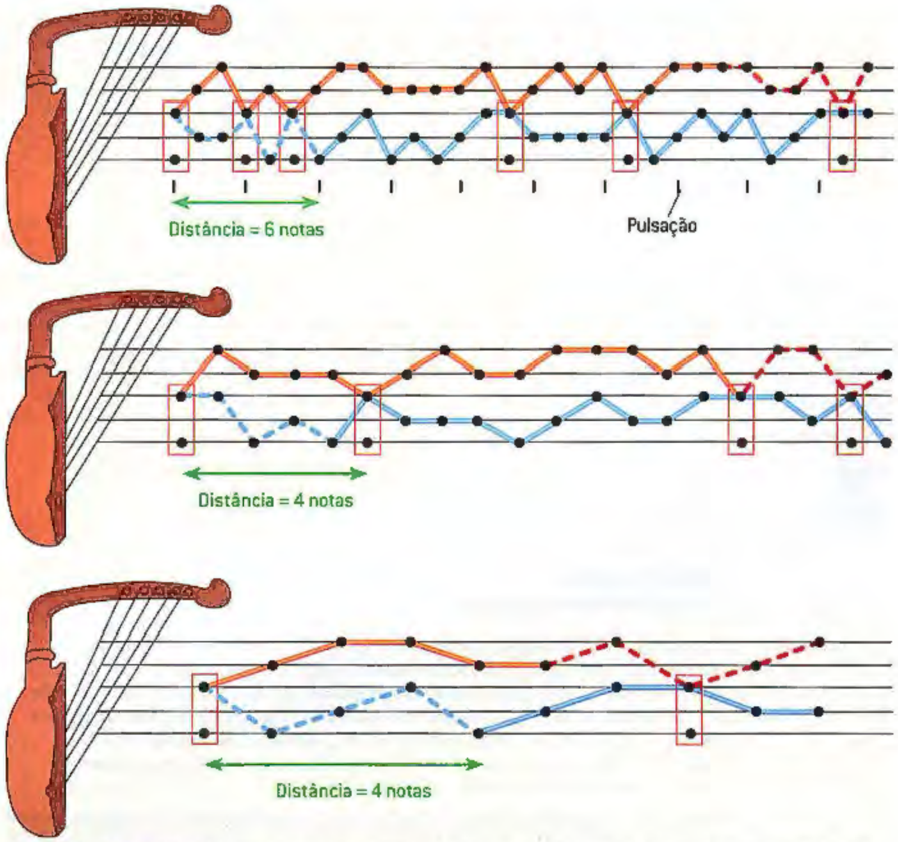
O CHEFE NZAKARA MADA NYALIKAWO acompanha com a harpa o canto de uma de suas esposas, que ao mesmo tempo vai batendo as mãos

Erros Canônicos

A ANÁLISE FORMAL do problema da construção de cânones mostra que eles contêm necessariamente determinados erros. Isso resulta do fato de que devemos percorrer um ciclo no gráfico da ilustração 2, e que tal ciclo passa obrigatoriamente pela flecha em pontilhados (do contrário a melodia se interrompe rapidamente e termina no par 4) responsável por uma anomalia na estrutura do modelo (a não ser com um ciclo "trivial", que consiste em repetir indefinidamente o mesmo par). Um raciocínio mais detalhado revela que o número mínimo de erros em um modelo sem ciclos triviais é igual ao máximo divisor comum (o MDC) de n e p, onde n é o comprimento da seqüência e p o intervalo do modelo. Os cânones nzakara sempre têm o número mínimo de erros (podemos verificar isso na ilustração 1, sabendo que os valores de n são respectivamente 30, 20 e 10, os de p são 6, 4 e 4, e os números de erros são 6, 4 e 2).

Nossa análise não leva em conta o modo como os próprios nzakara representam suas fórmulas de harpa, e quando falamos de "proibição" ou de "erros" na estrutura do cânone, esses termos têm somente valor metafórico. Em contrapartida, o problema é diferente no plano cognitivo, quer dizer, no das representações mentais autóctones. Será que os nzakara ignoram as propriedades dessas fórmulas, ou será que têm consciência da estrutura em cânone, ou seja, da identidade dos dois perfis melódicos?

Não podemos responder diretamente a essa questão, e num artigo da revista *L'Homme* expusemos essa problemática, chamando a atenção para as dificuldades que existem de fundamentar certas análises abstratas na realidade cognitiva autóctone. A maior parte dos estudos de etnomatemática aborda as propriedades formais de sistemas estudados independentemente dos processos mentais efetuados por aqueles que estão na origem desses sistemas. Uma das principais razões é o fato de que os estudos são feitos *a posteriori*, a partir de dados de campo, recolhidos sem qualquer preocupação matemática. Esse é o caso de nosso estudo, que revela a falta de informações sobre o modo pelo qual os músicos dessa sociedade representam para si próprios suas fórmulas instrumentais.

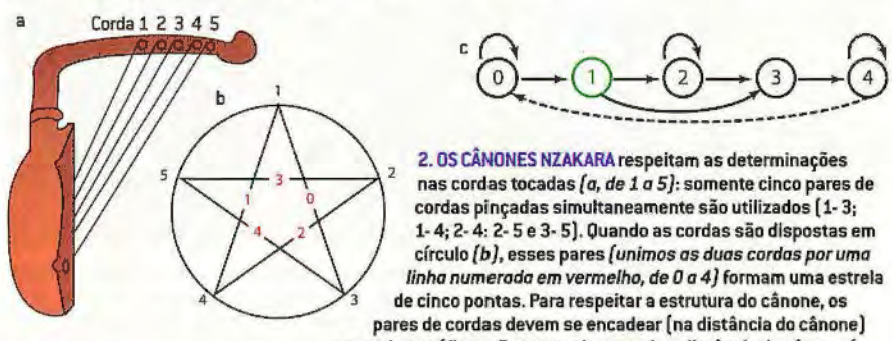


1. AS FÓRMULAS DE HARPAS nzakara são representadas pelos pontos [as notas] dispostas sobre cinco linhas, cada uma delas correspondendo a uma corda do instrumento. Essas fórmulas são cânones, ou seja, as duas melodias *(as linhas coloridas contínuas, a melodia tocada em notas graves em azul, a outra, aguda, em laranja)* são deslocadas no tempo. Entretanto, o cânone não é rigoroso e podemos observar "erros" *(marcados em vermelho, as melodias são prolongadas em linhas pontilhadas, para corrigir esses erros)*. O intervalo do cânone *(em verde)* é o número de notas que separam o início de cada melodia

A planta dos Gêmeos

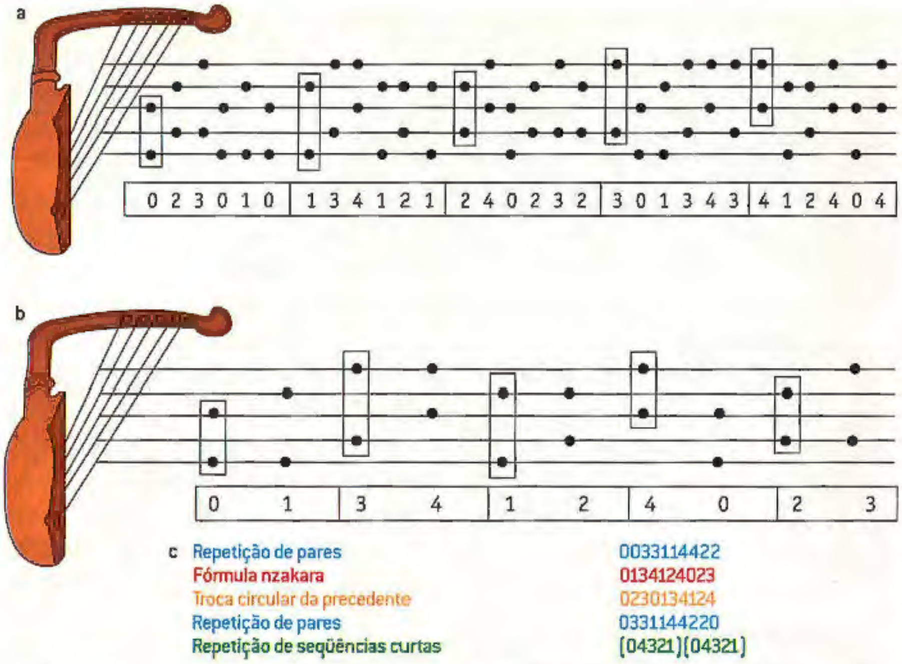
Propusemos um conjunto de indícios, retirados de nossos trabalhos feitos em colaboração com o etnólogo Eric de Dampierre, especialista em sociedade nzakara, indícios esses que poderiam explicar a aparição dessas fórmulas em cânone. Um dos principais argumentos em favor dessa hipótese é a utilização pelos nzakara de uma planta particular no ritual que se segue ao nascimento de gêmeos (ela é plantada em frente à casa onde eles nascem). A notável geometria dessa planta, da qual as duas fileiras de folhas estão dispostas em planos perpendiculares, e afastadas uma da outra ao longo do caule, explica por que ela intervém nesse ritual (propriedades "geométricas"). O interesse dos nzakara pela geometria dessa planta talvez esteja em relação com suposta intenção dos músicos, de tocar as formulas em cânone, ou seja, tendo duas linhas melódicas deslocadas.

Contudo a questão é controversa e o etnomusicólogo Klaus Peter Brenner não aceita a hipótese dos cânones, ao desenvolver a teoria de que, no plano cognitivo, as fórmulas nzakara devem ser analisadas de outra forma.

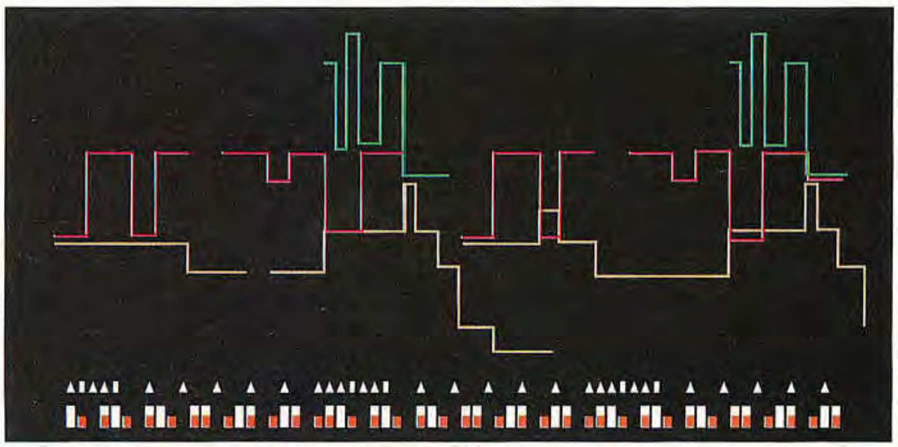


2. OS CÂNONES NZAKARA respeitam as determinações nas cordas tocadas *(a, de 1 a 5)*: somente cinco pares de cordas pinçadas simultaneamente são utilizados (1- 3; 1- 4; 2- 4: 2- 5 e 3- 5). Quando as cordas são dispostas em círculo *(b)*, esses pares *(unimos as duas cordas por uma linha numerada em vermelho, de 0 a 4)* formam uma estrela de cinco pontas. Para respeitar a estrutura do cânone, os pares de cordas devem se encadear (na distância do cânone) segundo o gráfico *c*. Por exemplo, quando a distância do cânone é igual a quatro notas, o par 1 deve, segundo as duas flechas que partem do ponto 1 *(em verde)* se fazer seguir, quatro passos adiante, do par 3 ou 2. A linha pontilhada é o percurso indispensável, mas não canônico, para percorrer um ciclo no gráfico e autorizar uma melodia

Na verdade, podemos analisar as fórmulas nzakara de modo totalmente diferente, apesar de equivalente pela lógica. Se numerarmos todos os pares de corda tocadas nas três formulas da figura 1 (adotando a numeração precedente, de 0 a 4) faremos então surgir uma estrutura "em escada". Por exemplo: na primeira fórmula os seis primeiros pares 023010 são em seguida deslocados em uma unidade – 134121 – e assim por diante, até voltar à seqüência inicial *(ver figura 3)*. A



3. A ESTRUTURA EM ESCADA dos cânones nzakara aparece quando nos interessamos pelos pares de cordas tocadas simultaneamente. Em *a*, o motivo 023010 é sucessivamente "deslocado" em uma unidade, 134121, 241232... para voltar ao motivo inicial (a etapa seguinte não representada). Em *b*, o motivo de dois pares sofre um deslocamento de duas unidades: 01, 34, 12... Ao estudar as seqüências possíveis *(c)* da fórmula *b (fixa-se o primeiro par, 0, e avaliam-se todas as possibilidades para o segundo)*, nos damos conta de que somente a fórmula nzakara *(em vermelho)* evita as repetições de pares *(em azul)* ou de seqüência curta *(em verde)*. Encontramos assim uma troca circular da fórmula nzakara *(em laranja)*



4. UMA POLIFONIA DE PIGMEUS AKA (aqui, a peça *mbenzele, segundo o CD-Rom Pigmeus aka, povo e música*) associa vozes *(as linhas verde, vermelha, marrom e amarela representam o canto)* e um fundamento polirrítmico tocado em instrumentos de percussão *(as figuras geométricas brancas)*. Nessa polirritmia, uma fórmula assimétrica *(os retângulos em laranja)* é tocada com lâminas de ferro. As durações que separam os sons nessa fórmula são variáveis e podemos reagrupá-las, para formar durações de duas unidades (um som e um silêncio) e de três unidades (dois sons e um silêncio). No final, obtém-se a fórmula rítmica 22222322223, que é repetida circular e ciclicamente

estrutura em escada consiste em reproduzir um motivo inicial de um número de unidades número de vezes suficiente, para se voltar ao ponto de partida. Podemos demonstrar que sob certas condições essa estrutura é logicamente equivalente à estrutura do cânone.

A estrutura em escada evidencia uma propriedade suplementar na mais curta das fórmulas da figura 3, a unicidade. Vejamos em que. Aqui, o motivo reproduzido 01 só contém dois pares. Podemos portanto nos perguntar quantas seqüências desse tipo é possível fabricar.

Fixemos o primeiro par em 0, e enumeremos os valores possíveis para o segundo. Se tomarmos 0, obteremos uma repetição de pares, o que não acontece jamais nas fórmulas do repertório nzakara. Se tomarmos 1, o resultado é a fórmula da ilustração 3. Se tomarmos 2, a fórmula obtida é somente uma permutação circular da precedente. Se tomarmos 3, obteremos novamente uma repetição de pares. Enfim, se tomarmos 4, constataremos que a fórmula se divide em duas (04321 é repetida duas vezes). Assim, para os valores 0, 3, 4 a seqüência obtida é de certa forma "degenerada" (repetição de um par ou repetição de uma seqüência mais curta). Além disso, para os outros valores 1 e 2, obtemos a mesma seqüência de uma permutação circular próxima. Finalmente, a fórmula nzakara aparece como a única maneira de produzir uma seqüência em escada a partir de um motivo que tem somente dois pares.

Descrevamos agora um segundo exemplo de estrutura matemática, presente nos repertórios musicais da África central, desta vez na dimensão rítmica. Trata-se de uma estrutura rítmica assimétrica, que é utilizada pelos pigmeus aka, entre outros povos, um grupo de caçadores-coletores da floresta tropical do sudoeste da República Centro-Africana, no vale do rio Lobaye.

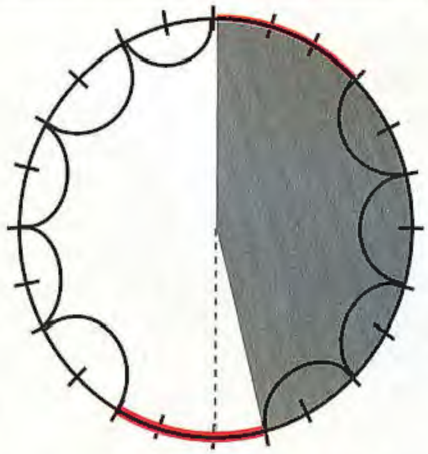
Esses ritmos assimétricos resultam de uma combinação de durações de duas e três unidades. As polifonias vocais e instrumentais muito complexas dos pigmeus aka contêm alguns desses ritmos. No interior da polirritmia representada na ilustração 4, uma fórmula assimétrica é executada com batidas das lâminas de facões de ferro, segundo a duração de duas ou três unidades. Repetida circular e ciclicamente, a grafia (ou representação numérica) da fórmula rítmica é 22222322223.

Ritmos Assimétricos

Os ritmos assimétricos desse tipo, que encontramos na África central, têm uma propriedade particular, chamada "imparidade rítmica", colocada em evidência pelo etnomusicólogo Simha Arom e expressa na forma de um enunciado matemático. Ao representar a seqüência rítmica

n_3	n_2	Duração	Transformações	Ritmo	Grupo étnico
2	1	8	*ab*	332	zande
	3	12	*abbb*	32322	aka, gbaya, nzakara
	5	16	*abbbbb*	3223222	gbaya, ngbaka
	9	24	*abbbbbbbbb*	32222322222	aka
6	3	24	*aaabbb*	333233322	não-utilizado
		24	*aababb*	333233232	aka (fórmula *mokongo*)
		24	*aabbab*	333232332	repetição da precedente

5. A IMPARIDADE RÍTMICA das fórmulas assimétricas aparece quando dispomos num círculo essas fórmulas *(aqui, 32222322222)*: não se pode dividir o ritmo *(o círculo)* em duas partes de mesma duração – isso qualquer que seja o ponto de partida. As seqüências *(o quadro)* que, por um lado, respondem a essa propriedade de imparidade rítmica e, por outro têm uma duração que é utilizada na região (8, 12, 16 e 24), são todas tocadas pelos aka ou por seus vizinhos. Nesse quadro, n_2 e n_3 correspondem à quantidade de núcleos rítimicos de 2 pulsações e de núcleos de 3 na seqüência. A duração corresponde à soma de n_2 e n_3. As transformações indicam como se pode obter o ritmo a partir da palavra vazia



precedente na forma de um círculo *(ver ilustração 5)*, a propriedade expressa faz com que não possamos dividir o círculo em duas partes iguais, qualquer que seja o ponto de partida escolhido.

Propusemos uma construção que permite obter passo a passo todos os ritmos que obedecem a essa propriedade de imparidade rítmica. Para todo par (u, v) de vocábulos formados de 2 e de 3, fabricamos dois novos pares de palavras, segundo duas transformações diferentes observadas, a e b: a primeira transforma u em $3u$ e v em $3v$: a segunda transforma u em v e v em $2u$.

É possível demonstrar matematicamente que as seqüências em que se verificam a imparidade rítmica são exatamente as mesmas que fabricamos colocando trecho a trecho duas palavras u e v, obtidas ao se aplicar um número qualquer de vezes as transformações a e b a partir da palavra *vazia*, com a condição que b seja aplicada um número ímpar de vezes. Por exemplo, a seqüência de transformações *abbb* leva à palavra 32322, como podemos verificar, etapa por etapa:

			b		*b*		*b*		*a*	
u:	Vazio	=>	Vazio	=>	2	=>	2	=>	32	
v:	Vazio	=>	2	=>	2	=>	22	=>	322	

Essa seqüência (uv = 32322) obedece à propriedade de imparidade rítmica.

Quando efetuamos a construção de todas as fórmulas rítmicas possíveis, de pequena extensão (para sermos realistas), percebemos que as soluções são pouco numerosas. E, além disso, pretendemos adequar um traço característico das fórmulas em uso na região, quando elas são praticamente todas utilizadas pelos pigmeus aka ou por outras populações (zande, gbaya, nzakara, ngbaka). Esse traço impõe que a soma total das durações apresentadas na seqüência seja sempre escolhida entre os valores 8, 12, 16 ou 24 (quer dizer, da forma 2^a ou 3×2^a). Ao restringir o cálculo às seqüências desse tipo, e ao eliminar também as que são a repetição de uma seqüência mais curta, obtemos o quadro da ilustração 5, onde n_3 e n_2 designam respectivamente os números de 3 e 2 da seqüência.

Quando n_3 = 2, as seqüências são todas utilizadas. Quando n_3 = 6, duas seqüências entre as três obtidas são recorrentes uma com relação à outra, o que significa que cada uma é obtida lendo-se a outra em sentido inverso (da direita para a esquerda). Uma das duas formas é utilizada pelos pigmeus aka. Trata-se da fórmula rítmica 333233232, chamada *mokongo*, batida sobre uma viga de madeira. Ela intervém no ritual do *zoboko*, que acontece na véspera de uma grande caçada. No final, só uma das seqüências teoricamente possíveis (333233322) parece não ser utilizada na região.

Essa enumeração permite acreditar que há razões de ordem cognitiva que explicam o aparecimento dessas fórmulas rítmicas. E ainda assim a questão continua sendo difícil de ser respondida, dada a ausência de relatos dos músicos a respeito de sua própria prática. Esses problemas são os mesmos que os evocados nos casos das fórmulas em cânone, da harpa nzakara. Em particular, nenhum termo vernacular caracteriza as fórmulas de harpa, que são cânones. Todavia, podemos utilizar o mesmo tipo de argumento combinatório que para os ritmos assimétricos. Na verdade, a estrutura em cânone nzakara aparece num grupo de seis fórmulas do repertório de harpistas. Ora, este é constituído de cerca de 30 fórmulas conhecidas: 20% das fórmulas têm a estrutura estudada. Essas fórmulas são minoritárias, mas sua proporção é notadamente superior ao que se obteria na ausência de fatores que favorecem o surgimento de tais fórmulas.

Assim, quando uma propriedade não aparece de modo acidental, supomos que as condições psicológicas particulares privilegiam seu aparecimento. Uma representação mental não explicitada explicaria, portanto, a existência dessas fórmulas em cânone. SA

***M. Chemillier** é professor da Universidade de Caen, na Baixa Normandia, França.*

PARA CONHECER MAIS

Représentations musicales et représentations mathématiques. Marc Chemillier, in *L'Homme*, número especial *Musique et Anthropologie*, nº 171-172, págs. 267-284, 2004.

Polyphonies et polyrythmies d'Afrique centrale. Structure et métodologie. S. Arom, Paris, Selaf, 1985.

Fractais africanos

O urbanismo e a arquitetura de algumas aldeias baseiam-se nesta geometria de curvas

Por Ron Eglash

São inúmeras as formas que se explicam pela geometria fractal – essas curvas invariantes, qualquer que seja a escala de observação: um detalhe aumentado é idêntico ao conjunto do qual ele se origina. O formato das nuvens ou as flutuações das bolsas de valores são hoje em dia resolvidos com essa ferramenta matemática, usada também para decifrar a arquitetura e o urbanismo africanos.

A aldeia de Logone Birni *(ver ilustração abaixo)*, em Camarões, foi construída pelos kotoko, povo que vive dos dois lados do rio Níger, a partir de um motivo de base retangular, que encontramos também como símbolo real no emblema. É possível explicar a organização do palácio real *(ver figura 1 na pág. ao lado)* por meio de um motivo fractal construído pela repetição de uma operação geométrica elementar: sobre uma fração de lados de um retângulo inicial, constrói-se um retângulo de proporções idênticas. Em seguida, novamente sobre os quatro retângulos, 16 outros são formados. O resultado é uma "grade" composta pelos lados de 20 retângulos, sobre a qual se pode sobrepor a planta do palácio real.

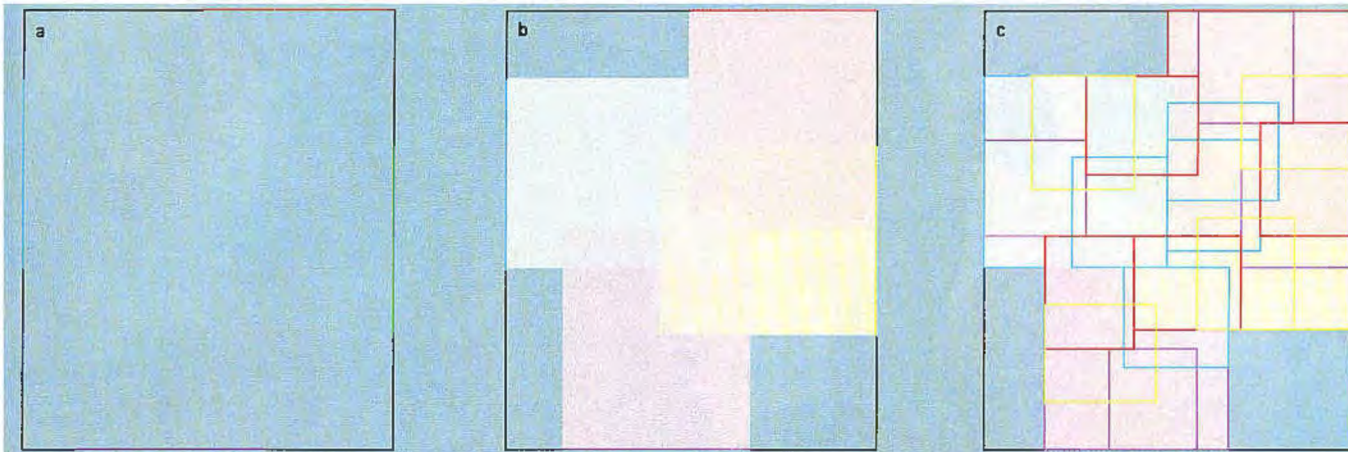
Da entrada do palácio à sala do trono, o visitante percorre uma espiral retangular, chamada "caminho de luz", cujos lados diminuem regularmente após cada ângulo. À medida que progride (em cada alteração de escala), o visitante adota uma linguagem mais polida e respeitosa. Uma vez na sala do trono, ele já não está usando seus calçados, e seu linguajar é particularmente preciso e codificado.

Da mesma maneira, encontramos uma forma fractal na estrutura do povoado Ba-ila, na Zâmbia *(ver ilustrações 2 e 3 na pág. ao lado)*. O motivo inicial é, aqui, uma curva circular não fechada, na qual se inscreve um segmento retilíneo. Ele é recortado em zonas "ativas", que serão substituídas por um motivo idêntico ao inicial, mas mais reduzido. A mesma operação é repetida em cada uma das zonas "ativas" do novo modelo. O resultado dá conta da estrutura global da aldeia.

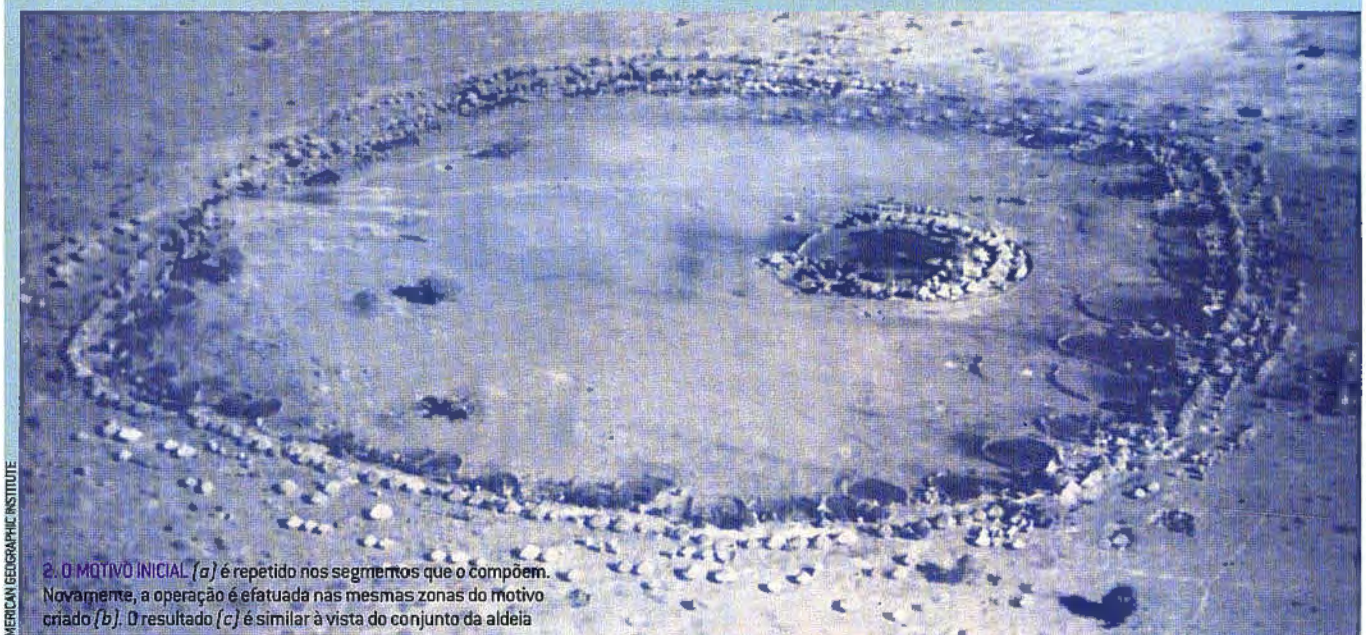
A arquitetura não é o único domínio em que encontramos fractais. Eles existem, por exemplo, também nos têxteis, no artesanato e nos penteados tradicionais africanos. Até hoje em dia, a matemática dos fractais explica em especial os fenômenos naturais; agora, eles são detectados na construção do homem.

***Ron Eglash** é professor do Instituto Politécnico Rensselaer, em Nova York.*

VISTA AÉREA da aldeia de Logone Birni *(à esq.)*, em Camarões, construída pelo povo kotoko, e imagem ampliada do palácio real *(à dir.)*. Ao centro é possível distinguir os cômodos do monarca *(delimitados por um traço descontínuo vermelho)* e a sala do trono, onde terminava o "caminho de luz"

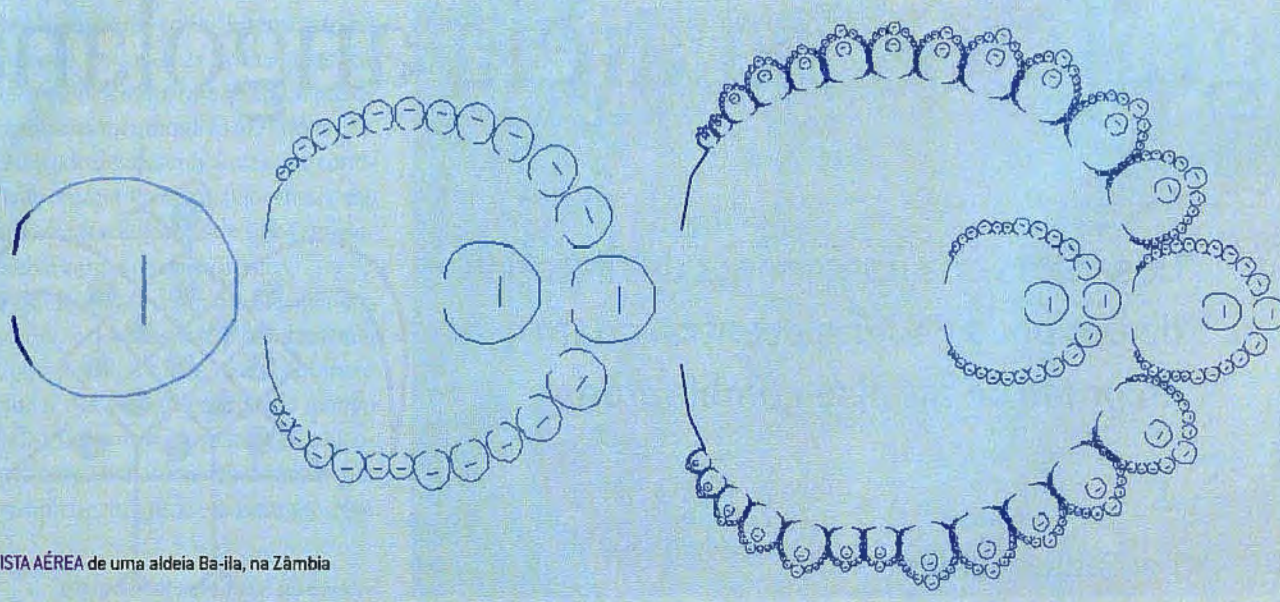


1. NAS QUATRO PARTES COLORIDAS dos lados do retângulo *(a)*, são construídos quatro outros retângulos de idênticas proporções *(retângulos coloridos da figura b)*. Em seguida, o mesmo procedimento é aplicado em cada um dos novos retângulos. O resultado *(c)* é uma "grade" constituída dos lados dos retângulos formados, que podemos colocar em paralelo com a planta do palácio real de Logone Brini representado na página ao lado

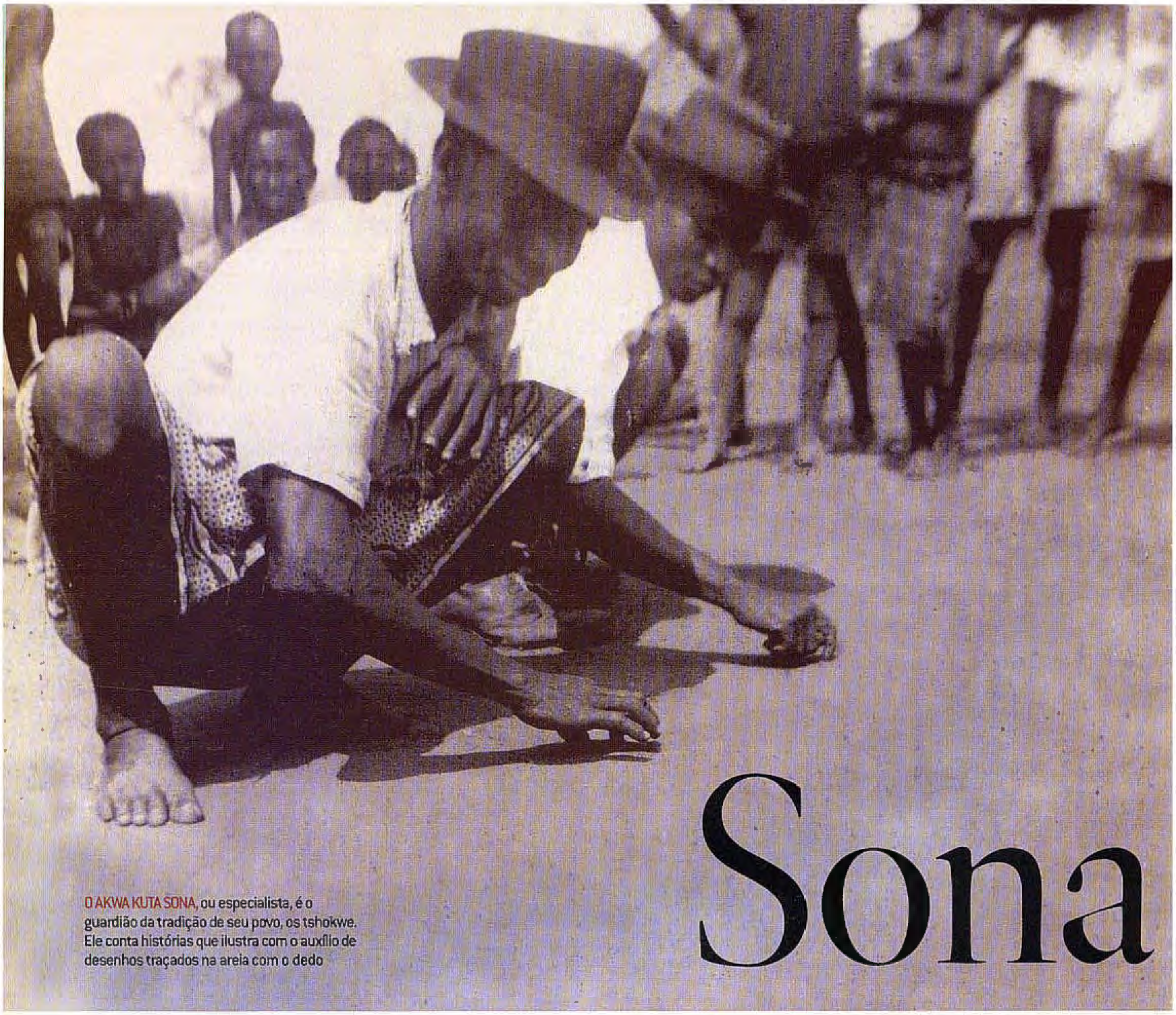


AMERICAN GEOGRAPHIC INSTITUTE

2. O MOTIVO INICIAL *(a)* é repetido nos segmentos que o compõem. Novamente, a operação é efatuada nas mesmas zonas do motivo criado *(b)*. O resultado *(c)* é similar à vista do conjunto da aldeia



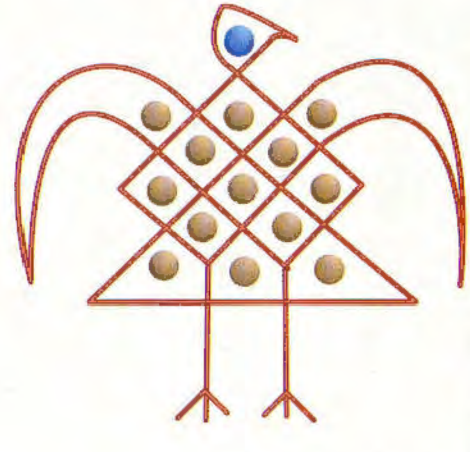
3. VISTA AÉREA de uma aldeia Ba-ila, na Zâmbia



O AKWA KUTA SONA, ou especialista, é o guardião da tradição de seu povo, os tshokwe. Ele conta histórias que ilustra com o auxílio de desenhos traçados na areia com o dedo

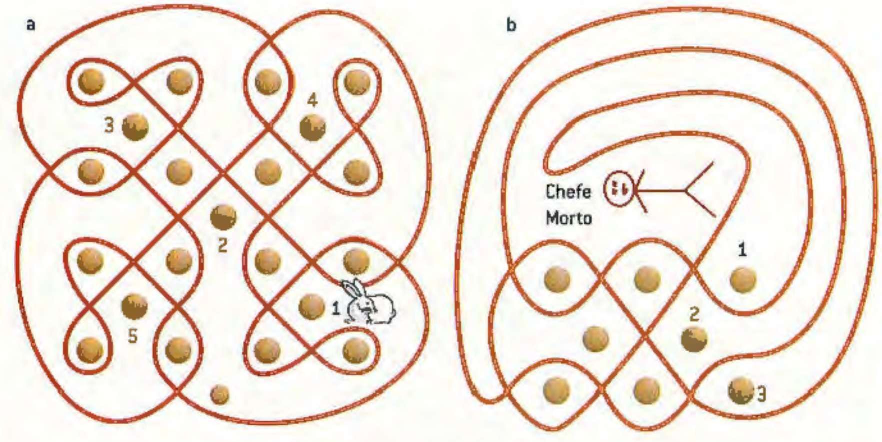
Sona
gráficos na areia angolana

Desenhos dos contadores de histórias de um povo da África central criam enigmas de análise combinatória



Por Paulus Gerdes

Até o final dos anos 1950, os nativos do povo tshokwe, ainda hoje composto de 1 milhão de habitantes no nordeste de Angola *(ver mapa abaixo)*, reuniam-se após um dia de caça em volta de uma fogueira e escutavam um deles contar histórias segundo um ritual preciso *(ver foto na pág. ao lado)*. Após ter limpado e alisado com a mão o solo arenoso, o narrador desenhava uma grade de pontos, cuidando para que estes estivessem regularmente espaçados. Em seguida, no decorrer de sua narrativa, seu dedo traçava ao redor desses pontos (em casos muito raros, passando por eles) uma linha curva (ou fio) que servia de base para sua história. Por exemplo, a figura 1*a* ilustra uma fábula na qual um coelho, em 1, descobre uma mina de sal, em 2. Infelizmente, esta é o objeto de desejo de um leão, em 3, de um leopardo, em 4 e de uma hiena, em 5, cada um deles invocando a lei do mais forte, para se apossar do tesouro. No final da história o coelho vence e permanece sendo o único a ter acesso à mina, pois os outros ficam separados pelo fio.



1. MUITAS VEZES lendas e fábulas baseiam-se nos sona. Por exemplo: *(a)*, um coelho *(1)* descobre uma mina de sal *(2)*, que um leão, *(3)*, um leopardo, *(4)* e uma hiena *(5)* desejam. No final da história *(quando o fio foi traçado)*, o coelho é o único proprietário, já que é o único a ter acesso à mina. O lusona em *b* ilustra outra história: por ocasião da morte do chefe de uma aldeia, três ladrões *(1, 2 e 3)* pretendem tomar seu lugar. No final, somente o segundo assaltante tem acesso ao cadáver: ele toma o poder e sobe ao trono

Tu Tshokwe *Filii*

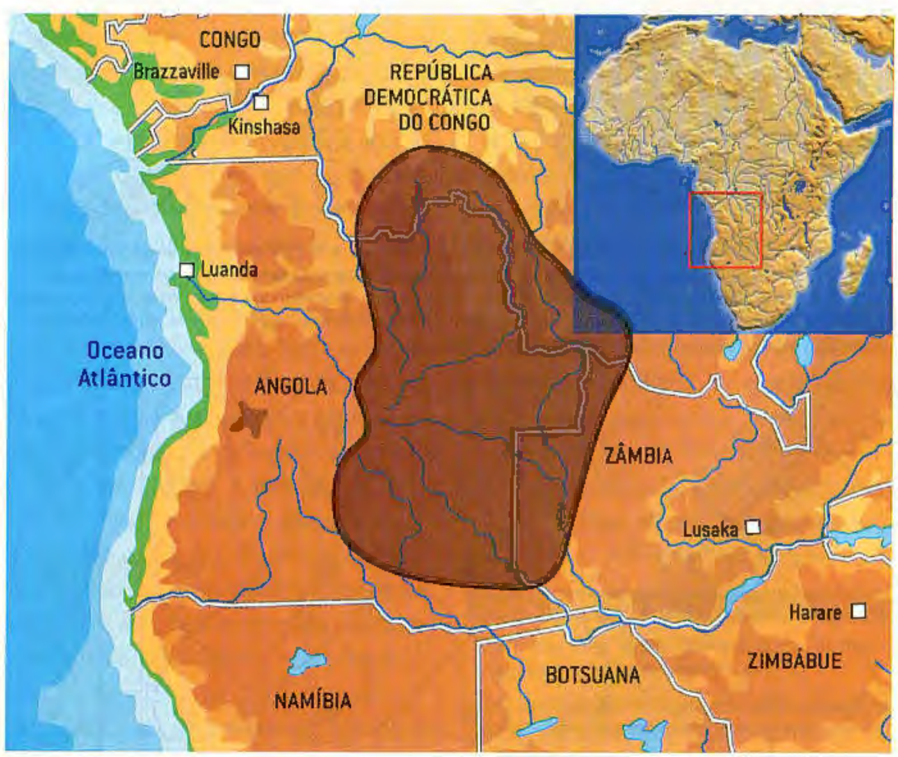
Esses desenhos chamados de sona (no singular, um lusona) pertencem a uma longa tradição: eles ilustravam provérbios, fábulas, jogos, animais e enigmas, e desempenhavam um papel importante na transmissão do saber às novas gerações. Vários sona evocavam o *mukanda*, o rito de passagem dos meninos à idade adulta.

O traçado dos desenhos era liso e contínuo, feito de uma só vez: qualquer hesitação era signo de falta de habilidade, que a audiência recebia com um sorriso irônico.

A grade inicial de pontos facilitava a memorização dos desenhos pelos *akwa kuta* sona, os especialistas nessa arte. O número de colunas e de linhas dependia do motivo desejado e da história. Por exemplo: o lusona que representa as marcas deixadas por uma galinha perseguida era ilustrado com um desenho cuja grade inicial tinha cinco linhas de seis pontos. Graças a esse método – um tipo de sistema de coordenadas –, os tshokwe reduziam a memorização de um lusona inteiro a uma de dois números, o das linhas e o de colunas.

É possível estudar esses sona por meio da matemática de gráficos, redes definidas por pontos (vértices) ligados por linhas (arestas). Nesses objetos, o comprimento e a curvatura das arestas não importam: dois conjuntos de vértices idênticos podem ser ligados da mesma maneira, mas por arestas com um "encanto" diferente: aqui, os gráficos são topologicamente equivalentes *(ver figura 2)*. Esse também é o caso de certos sona, em especial de dois que contam a história de Sa Chituku e de sua mulher Na Chituku: à primeira vista, esses dois sona são diferentes, mas eles são equivalentes – e os tshokwe sabem disso.

Determinados sona distinguem-se pelo fato de serem constituídos pela repetição de um motivo elementar. Esse é, por exemplo, o caso das árvores *muyombo (ver figura 3)*, sona que representam os antepassados da



O TERRITÓRIO (em marrom) dos tshokwe aldeia. Dediquemo-nos agora ao número de fios necessários para traçar os sona. A análise combinatória nos ajudará.

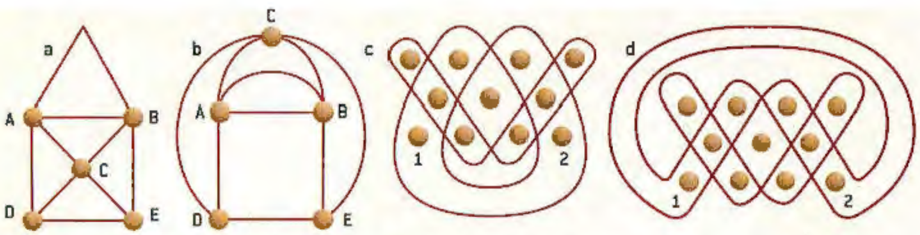
O Número de Fios

Os SONA QUE SE assemelham a tramas de tecelagem estão entre os mais simples *(ver figura 4)*. Entre eles, alguns são compostos de um único fio, que contorna cada ponto da grade, antes de reencontrar seu ponto inicial; outros exigem vários fios.

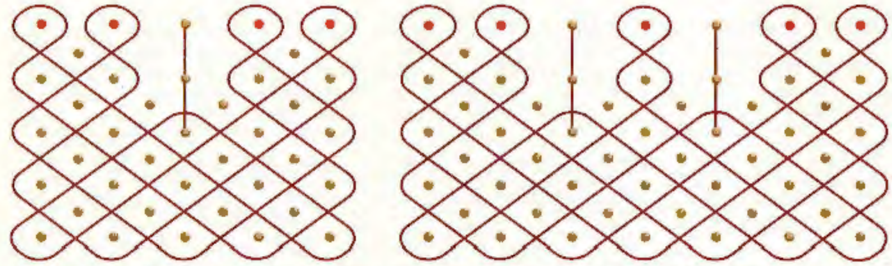
Podemos analisar propriedades matemáticas dos sona em trama, assim como os de outra família, chamada ventre do leão, e evidenciar em quais casos um único fio é suficiente para desenhar o lusona inteiro, e em quais outros vários são necessários. Dito de outra forma, dado o número de linhas e de colunas, de quantos fios precisamos para desenhar uma trama completa?

Antes de mais nada, imaginemos o lusona como a trajetória de um raio luminoso num plano retangular cujas paredes são espelhos. A luz é emitida de um canto do plano em determinada direção, formando um ângulo de 45° com um dos lados. Assim, a luz se reflete nas paredes, percorrendo as diagonais da grade.

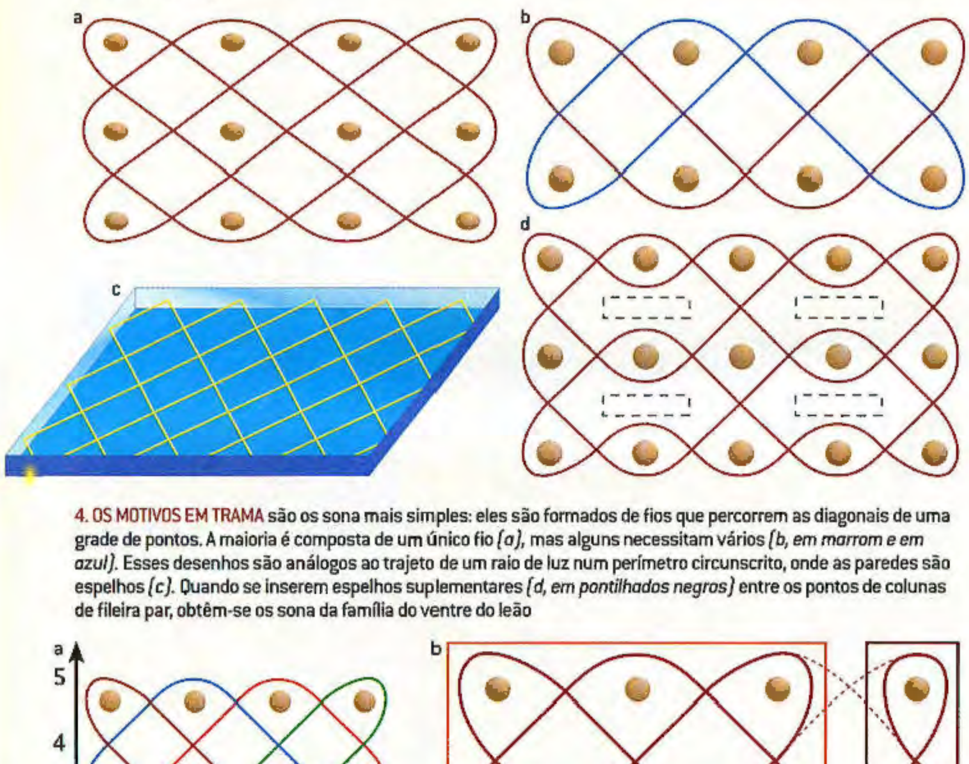
Usando um sistema de coordenadas para marcar os pontos de tal grade, observamos que um fio que parte do ponto $(a, 0)$ atinge o ponto $(n + 1, n + 1 - a)$, em seguida o ponto $(n + 1 - a, n + 1)$ e finalmente o ponto $(0, a)$, antes de reencontrar o ponto inicial. Na figura 5*a*, o fio passa pelos pontos $(2, 0)$, $(5, 3)$, $(3, 5)$ e $(0, 2)$. Cada fio é desviado três vezes antes de voltar a seu ponto inicial e percorre quatro diagonais: no total, é preciso desenhar *n* fios (retângulos) para percorrer todas as diagonais da grade. Uma grade



2. DOIS GRÁFICOS *(a e b)* são isomórficos: existe uma correspondência unívoca entre as arestas e os vértices de um e do outro. Aqui, verifica-se que os vértices A, B, C, D e E e as arestas AB, AC, BC, BE, CD, CE e DE são comuns aos dois gráficos. Do mesmo modo, os sona *(c e d)* são isomórficos: os pontos 1 e 2 representam Sa Chituku e de sua esposa Na Chituku no meio de seus vizinhos *(os outros pontos)*. O marido, ciumento, constrói barreiras que isolam sua mulher, obrigada, em conseqüência, a ser fiel

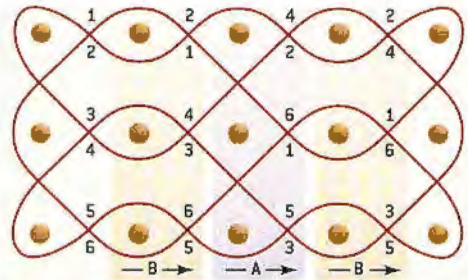


3. AS ÁRVORES *MUYOMBO* constituem uma família de sona que são a repetição de motivos elementares reunidos em grandes figuras. Os pontos *(em laranja)* da linha superior simbolizam os membros de uma família que ora aos antepassados

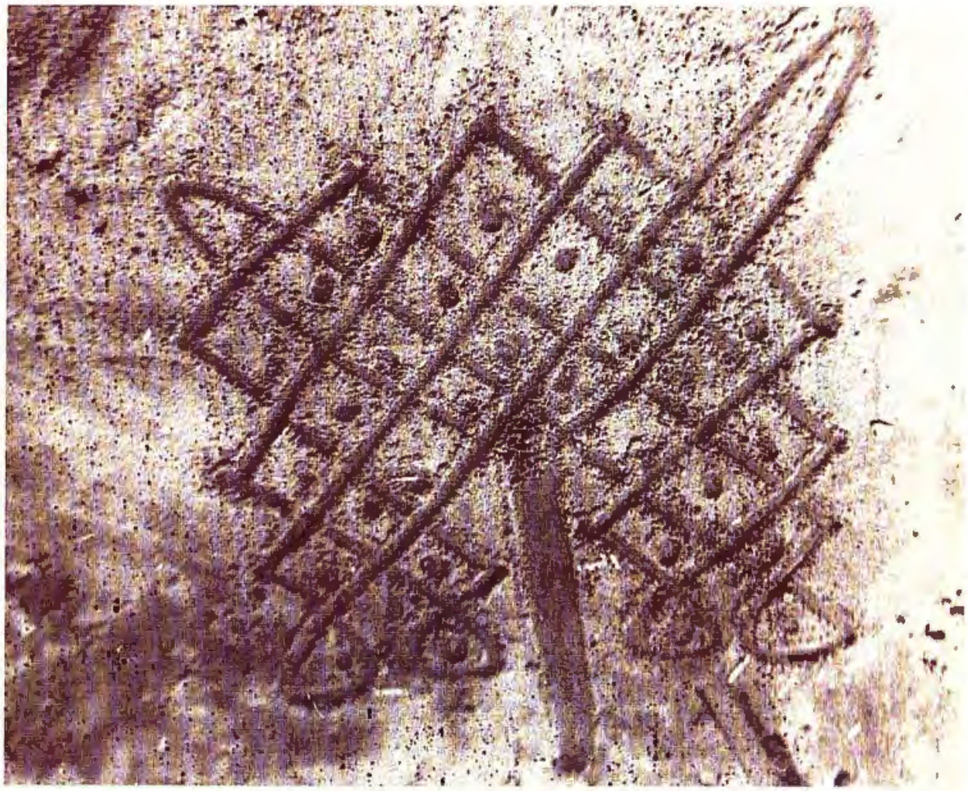


4. OS MOTIVOS EM TRAMA são os sona mais simples: eles são formados de fios que percorrem as diagonais de uma grade de pontos. A maioria é composta de um único fio *(a)*, mas alguns necessitam vários *(b, em marrom e em azul)*. Esses desenhos são análogos ao trajeto de um raio de luz num perímetro circunscrito, onde as paredes são espelhos *(c)*. Quando se inserem espelhos suplementares *(d, em pontilhados negros)* entre os pontos de colunas de fileira par, obtêm-se os sona da família do ventre do leão

5. UM MOTIVO EM TRAMA no qual a grade é quadrada *(a)* requer um número de fios igual ao número de pontos de cada lado, aqui quatro. Determina-se o número de fios necessários para uma grade qualquer, decompondo-se esta em quadrados *(b)*: demonstra-se que o número de fios para o motivo completo é igual ao número de fios necessários para a parte restante, quando se colocam de lado todas as grades quadradas. Em nosso exemplo *(uma grade de três linhas e de quatro colunas)*, após a eliminação do quadrado de 3x3 *(delimitado em laranja)*, resta uma coluna de três pontos *(delimitada em violeta)*, que pode ser cercada por um único fio: deduz-se que um fio é suficiente para toda a grade



6. OS SONA da família do ventre do leão são confeccionados com um ou mais fios. O número deles é determinado estudando-se dois tipos de transposição (A e B) de segmentos de fios *(numerados de um a seis após a intersecção de fios da primeira coluna)* à medida que eles passam as colunas. A transposição A corresponde à passagem de uma coluna sem espelho, a transposição B corresponde ao de uma coluna com espelhos. A análise de combinação de transposições, aqui BAB, mostra que um motivo com m linhas e n colunas requer um único fio quando $(n-1)$ é um múltiplo de quatro, de outro modo precisaria de m fios



quadrada de n pontos de lado requer, portanto, n fios. Em seguida, ao decompor em quadrados um dado motivo de tecelagem *(ver ilustração 5b)*, podemos demonstrar que o número de fios exigidos para o motivo inteiro é igual ao do motivo restante, ou ao número de linhas do último quadrado, quando a última grade é quadrada.

Um motivo de três linhas e quatro colunas, por exemplo, se decompõe em uma grade quadrada de nove pontos e uma coluna de três pontos, que um único fio percorre. Assim, no motivo inteiro, um único fio basta para desenhar o lusona inteiro.

Em contrapartida, para um motivo de duas linhas e quatro colunas, pomos de lado um quadrado de dois pontos e deixamos um quadrado idêntico: dois fios são necessários para desenhar um motivo de tecelagem em tal grade quadrada de quatro pontos; portanto, dois fios também são necessários para o motivo inteiro *(ver ilustração 4b)*. Quando a grade que sobra após a separação do primeiro quadrado ainda é importante, reiteramos a mesma operação até a obtenção de um motivo simples.

Esse processo é análogo à determinação do máximo divisor comum (MDC) de dois números (aqui o número de colunas e o número de linhas). Quando a divisão deixa de lado uma única linha (ou uma única coluna), os dois números não têm outro divisor comum que não seja um, eles são primos entre si: um único fio basta para o motivo inteiro. Dessa forma, a trama precisará de um número de fios igual ao MDC entre o número de colunas e o número de linhas.

O Ventre do Leão

DETALHEMOS AGORA os sona da família do ventre do leão *(ver ilustração 4d)*. Eles correspondem ao trajeto de um raio luminoso num perímetro circunscrito, no qual inserimos espelhos horizontais de duas faces espelhadas, entre os pontos de colunas de fileira par. Para determinar o número de fios necessários para tal motivo, analisamos sua evolução na medida em que eles passam de uma coluna (dotada ou desprovida de espelho) à seguinte *(ver figura 6)*.

Para fazer isso, numeramos os segmentos de fios imediatamente após as intersecções, por exemplo de um a seis, para uma grade de três linhas e cinco colunas. A transposição de segmentos após uma coluna sem espelho, denominada A, transforma a ordem 123456 em 415263. A transposição após uma coluna com espelhos, denominada B, transforma a ordem 123456 em 214365. O conjunto de transposições sofridas pelos segmentos até a penúltima coluna da grade forma, assim, uma "palavra" composta de A e de B, como BAB, em nosso exemplo.

Assim, para todo ventre de leão de m linhas e de n colunas, podemos escrever uma palavra composta de B e de A em alternância, uma vez que espelhos são colocados na metade das colunas, alternadamente. Essas palavras se simplificam ao reconhecer, por exemplo, que duas transposições sucessivas de tipo B não alteram a ordem de segmentos. Do mesmo modo, $2m$ transposições consecutivas de tipo A se anulam. Além disso, demonstramos que $BA = A_{2m-1}B$. No final, cada palavra simplificada obtida é da forma A_jB_k, onde k é 0 ou 1 e j é positivo.

A palavra de um motivo da família do ventre do leão é BABABA... ou $B(AB)_k$. Ao analisar os diferentes valores de k, demonstramos que tal motivo de m linhas e n colunas precisa de um único fio quando $(n-1)$ é um múltiplo de quatro, se não m fios.

O estudo dos sona ultrapassou o quadro emológico e permitiu o surgimento de um novo ramo da matemática. SA

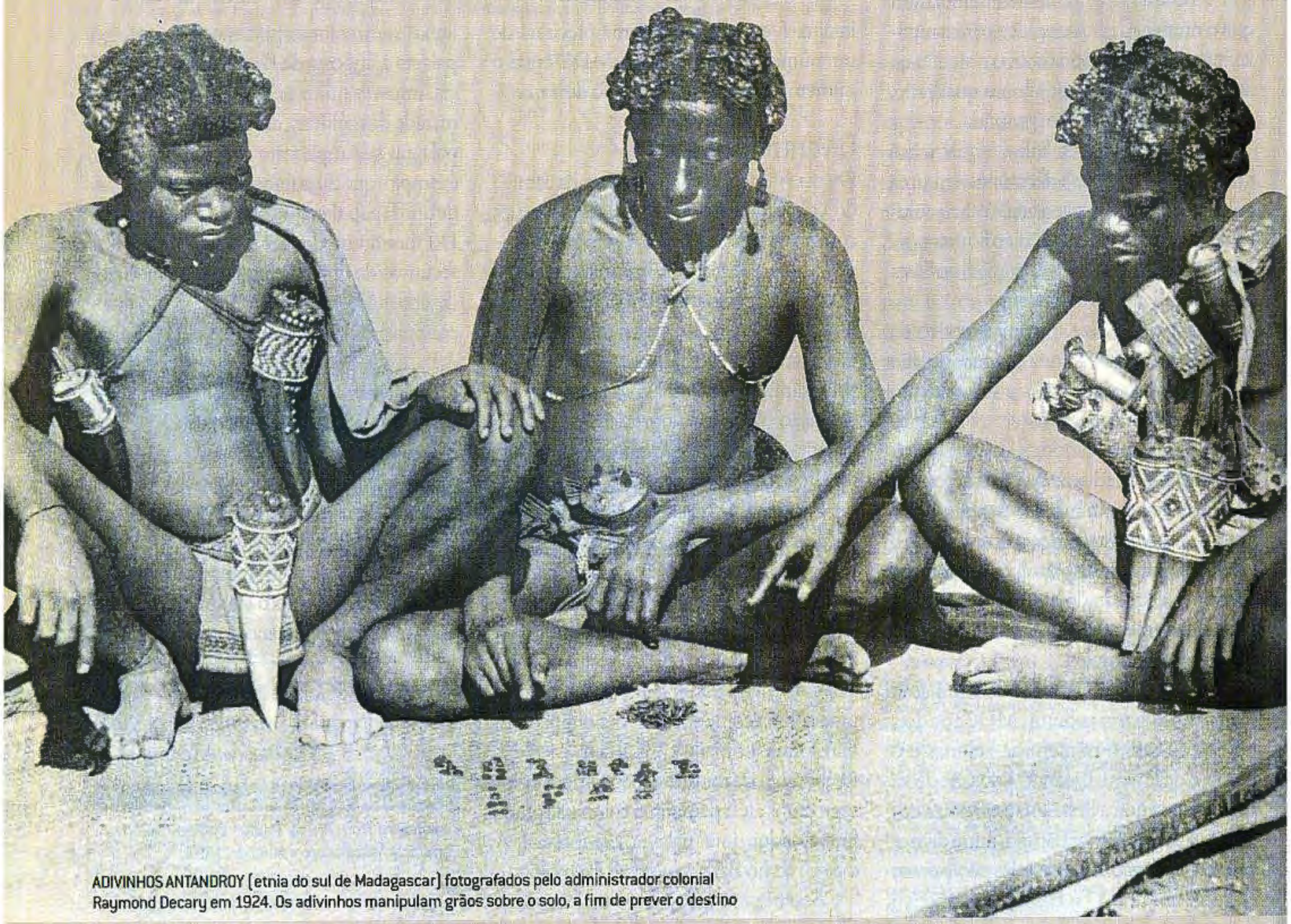
Paulus Gerdes é professor do Centro de Pesquisas em Etnomatemática de Maputo, em Moçambique.

PARA CONHECER MAIS

Geometry from Africa. Paulus Gerdes. The mathematical Association of America, 1999.

Une tradition géométrique en Afrique: les dessins sur le sable. Paulus Gerdes, L'Harmattan, 1995.

A arte dos adivinhos de Madagascar



ADIVINHOS ANTANDROY (etnia do sul de Madagascar) fotografados pelo administrador colonial Raymond Decary em 1924. Os adivinhos manipulam grãos sobre o solo, a fim de prever o destino

Para prever o destino, os malgaxes manipulam quadros de grãos que obedecem a regras matemáticas refinadas

Por M. Chemillier, D. Jacquet, V. Randrianary e M. Zabalia

O *sikidy* é um método de adivinhação utilizado em toda a ilha de Madagascar. Seus princípios foram herdados da geomancia árabe, que se propagou na África no rastro do Islã. Aparentemente, os malgaxes fizeram para si próprios uma adaptação desse modo de adivinhação, e a maioria da população local pratica as mesmas regras de construção formal de origem árabe, ainda que alguns detalhes sejam diferentes. Os malgaxes recorrem a adivinhos tradicionais para tudo em sua vida cotidiana, por isso eles podem ser encontrados em todas as cidades.

A adivinhação *sikidy* consiste em dispor sobre o solo grãos de *fano* (uma espécie de acácia) que formam um quadro, com o objetivo de "ler" o destino em determinadas disposições dos grãos. O procedimento comporta uma parte aleatória, na qual o destino se manifesta, e uma parte algorítmica, construída a partir da retirada, segundo regras precisas. Veremos que essa parte calculada envolve propriedades algébricas.

Vários estudos dedicaram-se às propriedades algébricas da adivinhação *sikidy*, em especial o de Marcia Asher e o de Manelo Anona, matemático da Universidade de Tananarive, este último não publicado. Sua fonte é o trabalho de um grande conhecedor das tradições malgaxes, Raymond Decary, que fotografou os adivinhos desde o início do século XX *(ver foto na pág. ao lado)*. Recentemente, o antropólogo Jean François Rabedimy, da Universidade de Tulear, no sudoeste de Madagascar, também observou a adivinhação *sikidy*.

Todos esses estudos de etnomatemática abordam as propriedades formais do sistema *in abstracto*, sem levar em conta os processos mentais desenvolvidos pelos adivinhos. Desde 2000, temos estudado aspectos algébricos da adivinhação associados à pesquisa de campo. Para ter acesso aos mecanismos mentais que "encarnam" as diferentes propriedades estudadas, filmamos em vídeo os gestos explicativos e as etapas de construção, e cronometramos determinadas operações mentais, a fim de estudar sua natureza.

A atividade de adivinhação começa pela mistura dos grãos atirados sobre o solo, e pela recitação de evocações místicas. Em seguida, o adivinho pega um punhado de grãos ao acaso, sem saber previamente qual é o número, que ele amontoa diante de si. Depois ele retira os grãos dois a dois, com os dedos indicador e médio. O adivinho só se interessa pelo que sobra dessa eliminação por pares, ou seja, pelo resto da divisão do número inicial por dois. Em conseqüência, o resto só assume dois valores, 1 ou 2 (mantém-se 2 em vez de 0, quando o número de partida é par, porque a manipulação do zero é pouco visual). Esse resto, determinado pelo número de grãos contidos inicialmente no punhado, é o resultado de uma retirada aleatória na qual se manifesta o destino do consultante.

Linhas e Colunas

A operação de retirada é repetida 16 vezes, e os 16 valores são colocados num quadrado, de quatro casas laterais, chamadas *renin tsikidy* (ou matriz mãe). Nesse quadro, interessa-se pelas linhas e colunas, o que define oito figuras compostas de quatro elementos *(ver ilustração 1)*.

Abaixo da matriz mãe, são construídas oito novas colunas, as "filhas", de quatro elementos cada. Esses elementos são as somas dos elementos, tomados dois a dois, de duas colunas ou de duas linhas, aplicando as regras de adição *módulo 2*, com a reserva citada anteriormente no zero não utilizado (1 grão + 1 grão = 2 grãos; 2 grãos + 1 grão = 1 grão; 2 grãos + 2 grãos = 2 grãos).

A adição de duas figuras de *sikidy* é uma operação comutativa (ela não depende da ordem das figuras) e associativa (a adição de três figuras é independente da ordem escolhida para adicionar, primeiramente, duas figuras, antes de adicionar a terceira ao resultado). Finalmente, a operação possui um elemento neutro que é o quádruplo (2, 2, 2, 2), e cada figura é seu próprio inverso: ao se adicionar uma figura a ela mesma, obtém-se sempre o elemento neutro (se o elemento é 1, então 1 + 1 = 2 e se o elemento é 2, então 2 + 2 = 2). Assim, a adição de figuras forma um grupo comutativo.

Ao repetir o processo de adição, os adivinhos obtêm várias gerações de filhas. As filhas diretas são calculadas pela adição de linhas ou de colunas da matriz mãe. Novas filhas são em seguida construídas a partir das precedentes. A ilustração 1 mostra um exemplo de configuração de *sikidy* no qual as colunas-mãe, contadas da direita para a esquerda, são numeradas de 1 a 4, as linhas-mãe (lidas da direita para a esquerda) são numeradas, de cima para baixo, de 5 a 8. as filhas de primeira geração são obtidas do seguinte modo: a filha 9 é a soma das linhas-mãe 7 e 8, a filha 11 é soma das colunas-mãe 5 e

1. UM QUADRO DE SIKIDY *(a)* é constituído de 16 seqüências de grãos com 4 casas cada uma. Cada uma contêm um ou dois grãos. As colunas-mãe *(1, 2, 3 e 4; os nomes vernaculares estão em vermelho)* e as linhas-mãe *(5, 6, 7 e 8; em azul)* formam a matriz originária a partir da qual se fabricam as filhas da primeira *(9, 11, 13 e 15; em verde)*, segunda *(10 e 14, em laranja)*, terceira *(12, em rosa)* e quarta *(16, em violeta)* gerações. As adições entre parênteses indicam os quádruplos-pais. Por exemplo, *(b)*, a filha asorita *(3+4)* é resultante da soma das colunas-mãe 3, (fahatelo) e 4 (bilady). Os elementos são adicionados dois a dois módulo 2

6, a filha 13 a soma das colunas-mãe 3 e 4, e a filha 15 a soma das colunas-mãe 1 e 2. As duas filhas de segunda geração são a 10 (9 + 11) e a 14 (13 + 15). A filha de terceira geração é a 12 (10 + 14). Finalmente, a filha de quarta geração é a 16 (12 + 1).

Figuras Pares e Ímpares

Cada uma dessas 16 posições, linhas e colunas-mãe, e as filhas de todas as gerações têm um nome vernacular: na ordem em que são numeradas, *tale, maly, fahatelo, bilady, fianahana, abily, alisay, fahavalo, fahasivy, ombiasy, haja, haky, asorita, saily, safary* e *kiba*.

As figuras (os quartetos) de *sikidy* são em número de 16 (2^4, pois, para cada um dos quatro elementos, pode-se escolher entre um ou dois grãos) e têm nomes vernaculares, diferentes dos anteriores, que correspondiam às localizações no quadro.

Usamos a terminologia da emia antandroy (do sul de Madagascar). Os nomes variam um pouco de uma emia a outra. Além disso, os adivinhos distinguem, em sua arte, duas classes importantes de figuras, aquelas cujo número total de grãos é par, os *mpanjaka* (príncipes) e aquelas cujo número total de grãos é ímpar, os *andevo* (escravos). Os príncipes são *tareky* (1, 1, 1, 1), *alasady* (1, 1, 2, 2), *adalo* (1, 2, 1, 2), *alokola* (1, 2, 2, 1), *alotsimay* (2, 1, 1, 2), *alohotsy* (2, 1, 2, 1), *adabara* (2, 2, 1, 1), *asombola* (2, 2, 2, 2). Os escravos são *karija* (1, 1, 1, 2), *alimizanda* (1, 1, 2, 1), *alakarabo* (1, 2, 1, 1), *renilaza* (1, 2, 2, 2), *alakaosy* (2, 1, 1, 1), *alaimora* (2, 1, 2, 2), *alibiavo* (2, 2, 1, 2), *alikisy* (2, 2, 2, 1).

Essa distinção príncipe/escravo tem papel importante na adivinhação. Uma regra simples é que um príncipe é mais forte do que um escravo. Tomemos o exemplo de um indivíduo que consulta a respeito de uma doença. O consultante é representado pela coluna 1 da matriz mãe. Obtém-se a doença adicionando a coluna 1 à filha 9. Assim, como a figura 1 é um escravo, mas a que representa a enfermidade é um príncipe, o adivinho deduz que a doença é grave.

A distinção príncipe/escravo também intervém numa propriedade formal do sistema de construção de figuras filhas, propriedade que determina que aquela que aparece na posição 12 (posição *haky*) seja necessariamente um príncipe. Podemos verificar isso na ilustração 1, na qual a figura em posição 12 é *alasady* (1, 1, 2, 2), que é realmente um príncipe; podemos também demonstrar essa propriedade, pois a soma dos grãos na coluna 12 é igual, *módulo 2*, ao dobro da soma de todos os elementos da matriz mãe, uma vez na ordem das linhas, e uma vez na ordem das colunas. Na verdade, quando se olha o procedimento de elaboração de filhas: 12 = 10 + 14, ora 10 = 9 + 11 e 14 = 13 + 15, seja 10 = 7 + 8 + 5 + 6 e 14 = 4 + 3 + 2 + 1, portanto 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8. Sendo o número de grãos nessa soma necessariamente par (cada elemento de matriz mãe é contado duas vezes), a posição 12 é realmente um príncipe.

Podemos olhar adiante e mostrar que toda figura par (não importa qual príncipe) pode aparecer nessa posição. Para tanto, basta construir uma matriz mãe cujos elementos são pares de grãos, exceção feita a alguns grãos isolados posicionados *ad hoc*, a fim de obter a figura desejada. O conjunto de figuras que pode aparecer na posição 12 é portanto o conjunto de todas as figuras pares. Por um raciocínio análogo, demonstramos que uma figura qualquer (príncipe ou escravo) pode aparecer em toda posição secundária (as filhas) com exceção da coluna 12, que só é ocupada por príncipes.

Os adivinhos conhecem essa propriedade da coluna filha 12, e ela é usada para verificar que não houve erro de cálculo. A presença de um príncipe nessa posição é uma condição *sine qua non* para que um quadro de 16 figuras possa ser interpretado. Todavia, isso não diz nada a respeito do modo pelo qual os adivinhos conceitualizam a noção da própria "paridade". Será que eles são conscientes de que a distinção príncipe/escravo se baseia num critério aritmético, e se sim, como eles a expressam?

A resposta nos foi dada por Raymond, um adivinho de emia mahafaly que vive em Tulear. Ele posicionou oito figuras pares umas ao lado das outras, em seguida, em cada figura movimentou todos os grãos isolados, de modo a emparelhá-los com um outro grão isolado da mesma figura. O resultado é uma sucessão de configurações nas quais os grãos são agrupados dois a dois. Ele comentou esse procedimento, dizendo que os príncipes são *tsy ota* ("sem pecado"). Esse termo é uma maneira de qualificar um número par, pois isso significa afirmar que ao proceder ao emparelhamento de grãos não se deixa nenhum isolado. Para as oito figuras ímpares, o procedimento é o mesmo, mas Raymond fez notar que após o emparelhamento sobra sempre um grão isolado em cada figura, que ele movimentou para baixo. Ele qualificou o resultado de *ota*, o que denota um número ímpar.

Habilidade de Cálculo

Nós fizemos testes cronométricos *(ver ilustração 2)*, para estudar a operação mental efetuada pelos adivinhos na distinção das figuras pares e ímpares, e para compará-la com a de pessoas que não são adivinhos. Na tela de um laptop, 48 figuras de *sikidy* são propostas sucessivamente. A pessoa deve reconhecer os príncipes e os escravos, apertando uma tecla à esquerda ou à direita.

Para quem não é adivinho, a figura *asombola* (2, 2, 2, 2) é detectada muito mais rapidamente como sendo um príncipe: a curva apresenta sistematicamente um pico inferior no tempo de reação quando essa figura aparece. Assim também, a figura *tareky* (1, 1, 1, 1), que tem quatro grãos, também corresponde a um mínimo da curva. Para as outras configurações, os tempos são variáveis.

Em contrapartida, no caso dos adivinhos o reconhecimento príncipe/escravo é aparentemente um mecanismo mental tão bem integrado que a contagem dos grãos das figuras é inútil. Esses testes demonstram igualmente que o procedimento de agrupamento de grãos descrito anteriormente por Raymond, para classificar as figuras em *ota* e *tsy ota* é um meio teórico de explicar a distinção príncipe/escravo, mas não corresponde a um procedimento utilizado na prática.

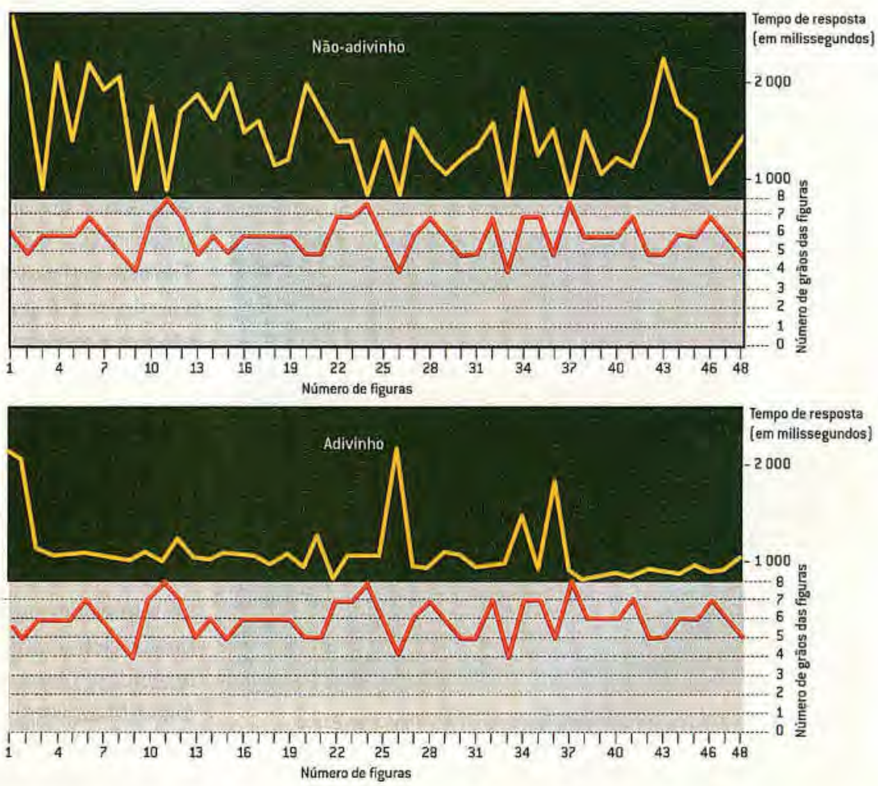
As posições da esquerda para a direita das filhas na parte inferior do quadro da ilustração 1 não correspondem à ordem na qual os adivinhos as dispõem; assim, por exemplo, a filha 11 é construída antes da filha 10. Entretanto, a ordem de construção é algumas vezes modificada de modo a que as filhas sejam elaboradas sucessivamente da esquerda para a direita, ou em sentido inverso. Nós observamos vários exemplos, alguns dos quais nos foram revelados *a posteriori* pela gravação em vídeo das sessões de trabalho.

No caso de inversão, Njarike, um adivinho antandroy de Tulear, construiu a coluna 10 (9 + 11) antes da 9, ou seja, da direita para a esquerda 11, 10 e 9. Nessa situação, a inversão se explicaria por circunstâncias particulares. O elemento que apareceu anteriormente em 11 era a figura *asombola* (2, 2, 2, 2), ou seja, o elemento neutro do grupo. Por esse motivo, Njarike pode prever que as colunas 9 e 10, nas quais se acrescenta o elemento neutro a 9, são idênticas; assim, ele pode posicionar essa figura em 10 antes de reproduzi-la em 9.

Todas as inversões que registramos estão ligadas ao surgimento do elemento neutro (2, 2, 2, 2). Assim, a inversão em relação à ordem de construção normal revela a consciência que os adivinhos têm do papel do elemento neutro, desempenhado pela figura *asombola*.

Talvez os adivinhos utilizem uma ordem de construção esquerda-direita das figuras secundárias de modo mais sistemático. É isso que afirma Jean François Rabedimy em sua obra sobre o *sikidy*. O método que ele descreve é o de calcular as filhas de segunda e de terceira gerações (10, 14 e 12) operando não mais a partir das de primeira geração (9, 11, 13 e 15), mas referindo-se diretamente à matriz mãe.

Para a coluna 14 de segunda geração, por exemplo, temos por associação da operação de grupo 14 = 13 + 15 = 1 +2 + 3 + 4. Em outros termos, a filha 14 é a combinação das quatro colunas da matriz mãe. Os quatro componentes dessa coluna 14 são, portanto, dados pelas somas dos grãos nas quatro linhas – quer dizer, pelas classes das figuras correspondentes (príncipe ou escravo). Nesse caso, vimos que os adivinhos são acostumados a determinar a classe de uma figura. Assim, eles podem obter os quatro elementos da coluna 14 com um único golpe de vista a partir das linhas 5,

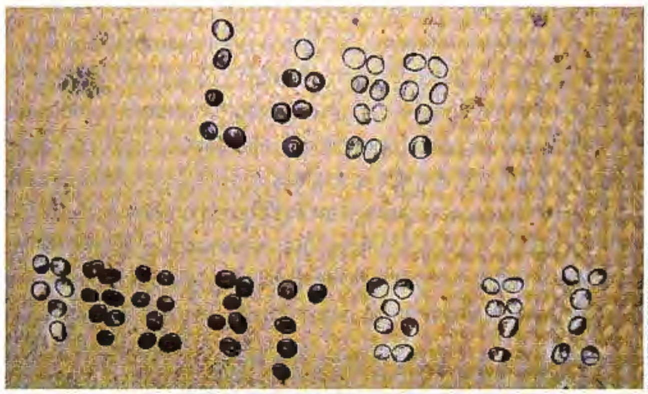


2. TESTES DE RECONHECIMENTO da paridade, por meio de um programa informático de experimentação em psicologia cognitiva *(pessoa que não é adivinha no alto, adivinho embaixo)*. **A curva** *(em amarelo)* **dá os tempos de resposta em milissegundos para uma série de 48 figuras entre as quais era preciso reconhecer a paridade do número de grãos. Uma segunda curva** *(em laranja)*, **no retângulo inferior** *(em cinza)*, **indica os números de grãos das figuras** *(de 4 a 8)*. **Um não-adivinho não é rápido** *(os valores mínimos do tempo de reação)* **no caso das figuras extremas de quatro ou oito grãos. Um adivinho, com algumas exceções, vê imediatamente a paridade**

6, 7 e 8 da matriz mãe. De modo similar para a coluna 10, seus quatro elementos podem ser determinados diretamente a partir das colunas 1, 2, 3 e 4 da matriz mãe.

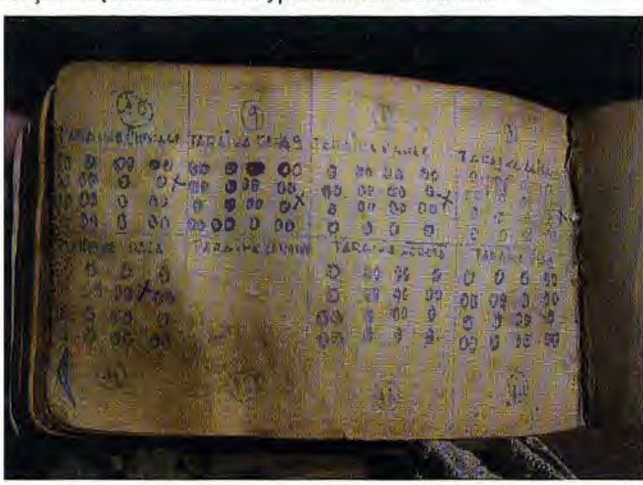
Para a coluna de terceira geração 12 = 10 + 14, é preciso combinar a classe de cada linha com a da coluna correspondente. Os adivinhos não têm nenhuma dificuldade para manipular as combinações dessas classes. Na realidade, as figuras pares e ímpares (os príncipes e os escravos) combinam-se respeitando regras precisas que resultam da estrutura matemática subjacente ao *sikidy*: *mmpanjaka* + *mpanjaka* = *mpanjaka*; *mpanjaka* + *andevo* = *andevo*; *andevo* + *andevo* = *mpanjaka*. Ao olhar a matriz mãe, eles poderiam determinar os quatro elementos da coluna 12 antes de ter calculado a coluna 14.

Assim, todas as filhas até a coluna 15 podem ser calculadas com um simples olhar sobre a matriz mãe. Ao calcular as filhas da esquerda para a direita, a última 16 = 1 + 12 é obtida a partir das figuras 1 e 12, já disponíveis.



PROJECT COGNITIQUE ACT76

3. UM TOKA é um quadro de *sikidy* no qual um ponto cardinal (a cada ponto cardinal estão associadas 3, 4 ou 5 figuras) só é representado uma vez. A foto, feita por Boribory, um adivinho muito consultado em Tulear, mostra um toka para a figura asombola (2, 2, 2, 2) na coluna 2 *(assinalada em vermelho)*, que é a única do quadro a estar "orientada" na direção sul. Essa propriedade confere ao quadro um poder particular. Um pó foi jogado sobre os grãos dessa coluna, assim como sobre os das figuras do quadro "orientadas" na direção leste *(assinaladas em verde)* para confeccionar um talismã



PROJECT COGNITIQUE ACT76

4. ESTE BLOCO DE NOTAS registra os *tokan-tsikidy* que o adivinho Jean Bosco Randriampaniry, de Tananarive, encontrou ao longo de sua carreira. Somente as matrizes estão anotadas, a casa que falta é a de uma configuração prevista, mas ainda não encontrada

Nós fizemos experiências de cálculo mental das filhas de um quadro, ora na ordem normal de construção, ora na ordem esquerda-direita. Uma matriz mãe originária é construída ao acaso, e o adivinho deve dizer os nomes das figuras que aparecem nas posições secundárias (de 9 a 16), sem fazer isso com os grãos. Adivinhos de Tulear não tiveram dificuldade para efetuar o cálculo nos dois sentidos, o normal e o da esquerda para a direita.

Quadros Notáveis

Os adivinhos estudam certos quadros particulares de *sikidy*, cujo aparecimento quando de uma sessão de adivinhação é um acontecimento que requer uma atenção especial. Uma primeira categoria de quadros, chamados *toka* (ou *into*), faz acontecer uma repartição das 16 figuras segundo os pontos cardinais (eles não estão dispostos segundo os pontos cardinais, trata-se tão-somente de uma classificação). Nós indicamos a repartição antandroy, mas a repartição de figuras varia de uma etnia a outra: as figuras do norte são *renilaza*, *alibiavo*, *karija* e *adalo*; as figuras do sul são *alimizanda*, *alasady*, *tareky* e *asombola*; as figuras do leste são *alaimora*, *adabara* e *alotsimay*; as figuras do oeste são *alikisy*, *alakarabo*, *alokola*, *alohotsy* e *alakaosy*. Na interpretação dos adivinhos, os pontos cardinais desempenham um papel tão importante quanto a natureza (príncipe ou escravo) das figuras. Por exemplo, uma regra estipula que dois príncipes ou dois escravos do mesmo ponto cardinal não se prejudiquem jamais.

Por definição, os *tokan-tsikidy* (o nome de um quadro *toka*) são quadros nos quais um dos pontos cardinais só é representado uma vez entre as 16 posições *(ver ilustração 3)*. Essa definição revela uma unicidade. Às vezes os adivinhos jogam um pó sobre certas figuras de um quadro notável, para fabricar talismãs considerados perigosos.

O prestígio dos adivinhos baseia-se em parte na quantidade de *tokan-tsikidy* que eles conhecem. Esse é o motivo pelo qual eles buscam ativamente esses quadros. Um dos resultados mais importantes de nossas expedições de campo foi a descoberta de cadernetas nas quais eles anotam essas configurações excepcionais. Tivemos a sorte extraordinária de fotografar um deles *(ver ilustração 4)*, o de Jean Bosco Randriampaniry, adivinho de Tananarive. As anotações revelam que os adivinhos utilizam métodos de classificação sistemática dos quadros. A página é dividida em casas, nas quais são alinhadas configurações de grãos (somente as matrizes mães são anotadas), mas uma das casas está vazia, provando que o adivinho antecipa a existência desse tipo de configuração, mesmo que ele não a tenha nunca encontrado.

Nós desenvolvemos um software que permite calcular todos os *tokan-tsikidy*. Um quadro é inteiramente determinado pelos 16 termos de sua matriz mãe. Existem, portanto, 2^{16} quadros possíveis (65.536), algo que um computador percorre em alguns segundos. Dessa forma, demonstramos que existem 15.751 *tokan-tsikidy* (no sistema Antandroy) e que há determinadas impossibilidades. Por exemplo, três figuras do sul (*tareky*, *asombola* e *alasady*) não podem ser *toka* (quer dizer, único representante de seu ponto cardinal) nem em 11 nem em 15. Assim também, quatro figuras do oeste (*alakarabo, alokola, alohotsy* e *alakaosy*) não podem ser *toka* nem em 9 nem em 13. Por fim, *alohotsy* não pode ser *toka* em 10. A maioria dos adivinhos conhece essas impossibilidades, não com base na lógica, e sim na tradição.

Os outros quadros particulares que interessam aos adivinhos, chamados *sikidy fohatse*, são aqueles nos quais uma mesma figura é repetida mais de oito vezes no interior do quadro. Os quadros com sete repetições ou menos também podem ser *fohatse*, mas o número oito é um limiar no plano lógico. Na verdade, a partir de oito repetições ou mais, determinadas impossibilidades aparecem.

Nosso software mostra que sempre é possível construir um quadro repetindo exatamente sete vezes uma figura dada, qualquer que seja a figura, mas que é impossível obter exatamente oito repetições das figuras *alokola, alikisy, alaimora, renilaza, alibiavo, adalo* e *tareky*. Para certas figuras, pode-se construir um quadro com mais de oito repetições e, em alguns casos, a solução é única: 8 *alotsimay*, 8 *alohotsy*, 8 *alakaosy*; 9 *tareky*, 9 *alimizanda*, 9 *adalo*, 9 *karija*, 9 *alokola*; 10 *alakaosy*; 11 *karija*, 11 *alimizanda*, 11 *alakarabo*; e, finalmente, 16 *asombola*.

Os adivinhos conhecem a maioria dessas configurações excepcionais. A categoria dos *sikidy fohatse*, que aparentemente é muito usada por eles, passou relativamente despercebida nos estudos sobre os *sikidy*.

Transposição da Matriz Mãe

Em sua pesquisa de *tokan-tsikidy*, os adivinhos usam uma operação matemática chamada transposição de matriz, que consiste em trocar as linhas e as colunas de uma matriz, quase como na operação de álgebra linear se faz com relação à primeira diagonal, enquanto que os adivinhos malgaxes a fazem com relação à segunda (a linha do alto torna-se a coluna da direita, e não da esquerda).

Como o sistema do *sikidy* determina que as linhas e colunas da matriz mãe desempenhem papéis quase simétricos, essa transformação deixa quase invariante o conjunto de filhas num quadro. Mais precisamente, quando trocamos as linhas e as colunas, as filhas 9, 10 e 11 são trocadas com as filhas 13, 14 e 15, ao passo que a coluna 12 permanece intocada. Somente a coluna 16 pode fazer surgir uma nova figura.

Assim, a transposição da matriz mãe modifica ao máximo uma figura no quadro de *sikidy*, de modo que se este for *toka* no início, ele continuará sendo após a transposição. Em vários casos, portanto, essa operação é um meio de obter um novo *toka* a partir de um *toka* dado. O termo antandroy que serve para designá-la é *avaliky*, que significa "inverter".

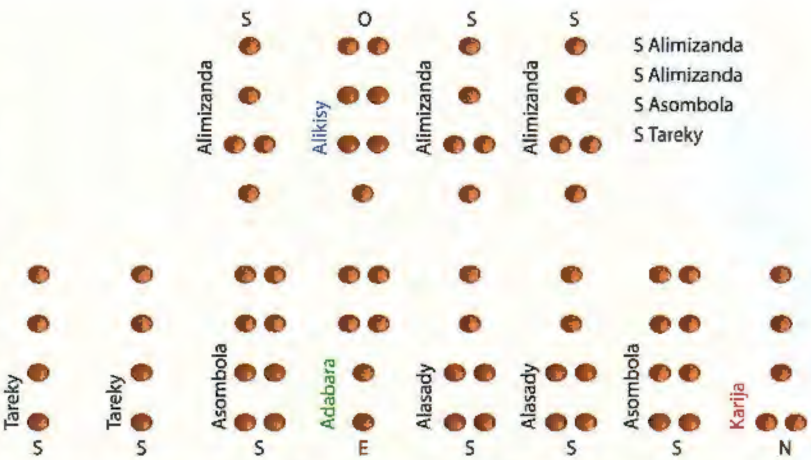
A operação de transposição aparece dela própria quando nos interessamos pelos quadros *toka*. Enumeramos as impossibilidades de que determinadas figuras sejam *toka* nas posições dadas. Essas posições são ligadas pela operação de transposição. Por exemplo, três figuras do sul não podem ser *toka* nem em 11 nem em 15. Nesse caso, a transposição da matriz mãe troca as colunas 11 e 15. Assim também, quatro figuras do oeste não podem ser *toka* nem em 9 nem em 13, duas posições trocadas por uma transposição. Os adivinhos, que conhecem essas impossibilidades, não deixaram de observar que elas se agrupam em pares de colunas trocáveis, sob o efeito de uma transposição.

Em contrapartida, a última impossibilidade (*alohotsy toka* em 10) é isolada, pois a coluna 14 associada por transposição permite obter os *toka* com a figura *alohotsy*. Aqui, a coluna 16 é modificada pela operação de transposição.

Um outro caso interessante no qual a operação de transposição intervém é o do triplo *toka*. Rabedimy nos mostrou um quadro três vezes *toka*, e ele tinha a intuição que só existe um único desse tipo (*ver ilustração 5*). Esse quadro é conhecido pelos adivinhos.

O cálculo por computador confirmou a intuição citada. A solução é única, mas isso só é verdadeiro para praticamente uma única transposição, aquela na qual duas matrizes dão um quadro três vezes *toka*, e essas duas matrizes são transposições uma da outra. Além disso, a primeira linha é igual à coluna da direita, e esta é uma condição suficiente para que um quadro permaneça *toka* após a transposição.

O sistema do *sikidy* é uma construção lógica com coerência interna, mas a pesquisa de campo mostra que esse edifício é construído sobre representações mentais explícitas entre os adivinhos, e que os conhecimentos desenvolvidos por eles preservam sua estrutura.



5. ESTE QUADRO DE SIKIDY, proposto por Jean François Rabedimy, é três vezes toka, ou seja, três dos quatro pontos cardinais são representados por uma única figura *[o norte em vermelho, o leste em verde e o oeste em azul]*

M. Chemillier, D. Jacquet *e* ***M. Zabalia*** *são professores da Universidade da Baixa Normandia em Caen.*
V. Randrianary *é pesquisadora do Laboratório de Etnomusicologia do Museu do Homem.*

Mosaicos e origami

A antiga arte de dobradura de papel mostra como se achata um cilindro

Por Ian Stewart

O origami, que em japonês significa a arte da dobradura de papel, guarda numerosas relações com a matemática. Examinaremos neste texto suas contribuições para a teoria dos mosaicos e para a inteligência mecânica.

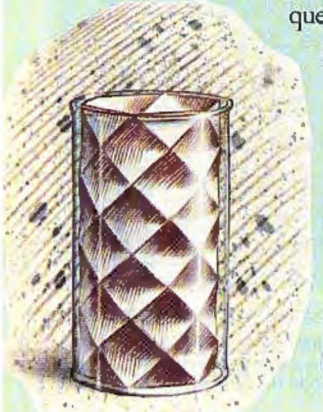
Tibor Tarnai, da Universidade de Budapeste, estudou um fenômeno que os engenheiros se esforçam para compreender, o esmagamento das estruturas: toda obra submetida a forças excessivas se deforma ou se rompe. Quando observado em folhas finas de metal é particularmente interessante, pois essas peças têm uma resistência considerável, apesar de sua massa frágil. A mais conhecida é a lata de alumínio para bebidas, uma obra-prima da produção industrial.

Quando um cilindro de metal é comprimido seguindo seu eixo – ou seja, quando o movimento obedece a ele é feito em seu sentido –, ele permanece cilíndrico até que as forças atinjam um valor crítico, a carga de esmagamento. E então ele é achatado de uma só vez. Durante a realização de experiências de laboratório, todavia, é possível limitar a deformação, por exemplo, ao ajustar um cilindro um pouco menor do que aquele que está sendo testado, em seu interior. Dessa forma, analisam-se as primeiras etapas do processo.

O esmagamento gera uma soberba estrutura simétrica, composta de losangos, que se assemelha bastante às figuras que obtemos ao dobrar uma folha de papel em triângulos e enrolá-la como um cilindro. O papel se deforma, então, como ocorre com uma folha de metal.

O primeiro tipo de deformação é chamado de estrutura de Yoshimura *(ver ilustração abaixo)*. Obtém-se tal estrutura pavimentando-se um plano com triângulos isósceles (formando o que chamamos, aqui, de mosaicos), todos planos, ou seja, não deformados.

Podem outras pavimentações do plano ser dobradas do mesmo modo? Sabemos há muito tempo que existem exatamente três tipos de mosaicos (ou pavimentações) regulares e uniformes. "Regular" significa que as peças são todas polígonos regulares idênticos; "uniforme" quer dizer que as combinações das peças são idênticas a cada vértice. Os mosaicos regulares e uniformes são compostos de triângulos eqüiláteros, de quadrados ou de hexágonos.



A ESTRUTURA DE YOSHIMURA corresponde ao modo principal de achatamento de um cilindro

Mosaicos Semi-regulares

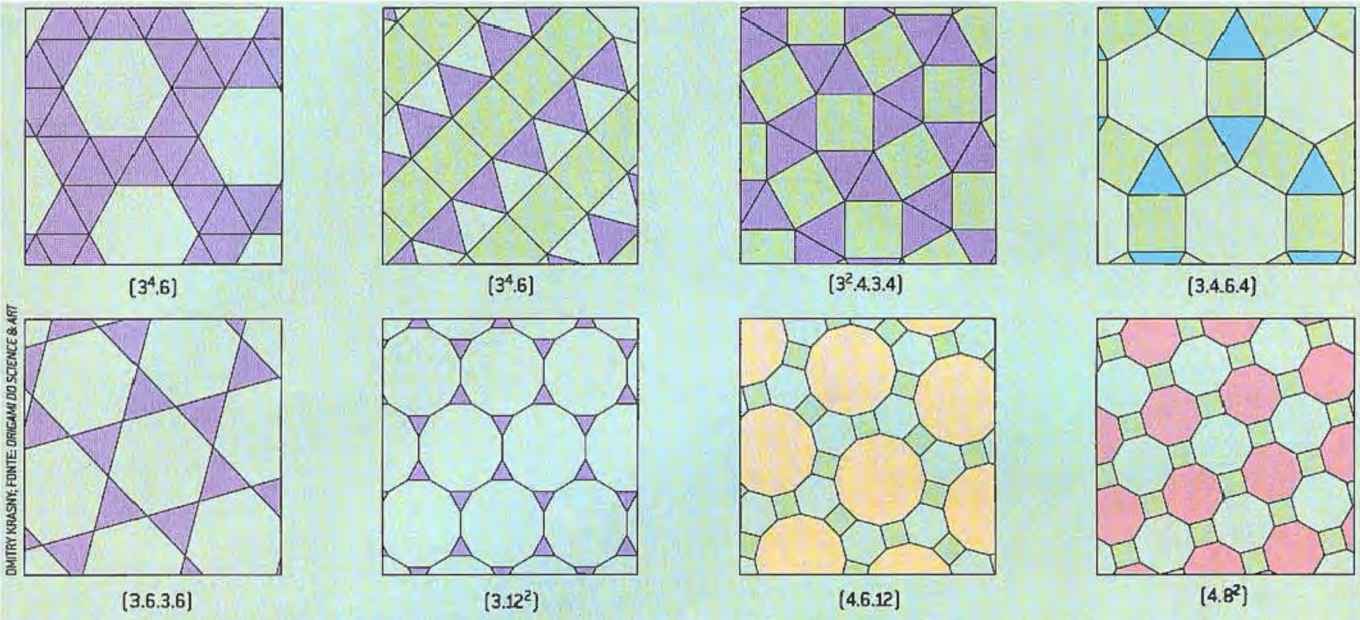
Em 1850, o matemático suíço Ludwig Schläfli demonstrou que existem, além dos regulares, oito tipos uniformes e "semi-regulares", nos quais todas as peças são polígonos regulares, mas não necessariamente idênticos. Designamos essas peças pelo símbolo de Schläfli, que assinala a natureza das peças ao redor de cada vértice. Por exemplo, a colméia é assinalada (6^3): cada vértice está na intersecção de três hexágonos. Os dois outros mosaicos regulares e uniformes são assinalados (3^6), quer dizer, seis triângulos eqüiláteros em cada vértice, e (4^4), ou seja, quatro quadrados.

Os mosaicos uniformes semi-regulares *(ver seqüência de figuras na pág. ao lado, acima)* são: ($3^4.6$), ($3^3.4^2$), ($3^2.4.3.4$), (3.4.6.4), (3.6.3.6), (3.12^2), (4.6.12) e (4.8^2). O mosaico (3.4.6.4), por exemplo, tem, em cada vértice, um triângulo eqüilátero, um quadrado, um hexágono e um outro quadrado. Na estrutura de Yoshimura, a peça não é um polígono regular (os triângulos deveriam ser eqüiláteros e não isósceles), e não deveria, portanto, estar na lista. Ela corresponderia à fórmula (3^6).

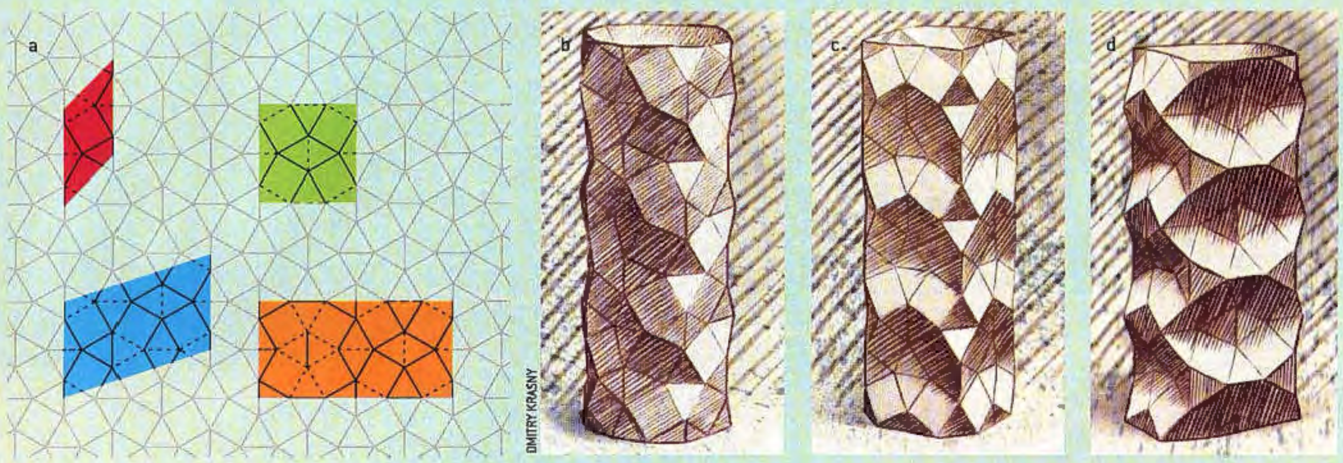
Quais estruturas podem ser dobradas no sentido das arestas de polígonos, de modo que as faces poligonais permaneçam planas? É possível dobrar uma estrutura 4^4 no sentido de suas linhas horizontais, ou das verticais, sem que as peças quadradas se deformem. Em contrapartida, isso não pode ser feito com uma estrutura 4^4 no sentido das linhas horizontais e verticais, pois as peças se curvam.

Em 1989, Koryo Miura demonstrou que nenhum mosaico no qual três arestas se cruzam num vértice pode ser dobrado, o que elimina as possibilidades (6^3), (3.12^2), (4.6.12) e (4.8^2). Acontece

MATT COLLINS (abaixo); © LUIZ FERNANDO MACIAN (acima)



1. OS OITO TIPOS DE MOSAICO SEMI-REGULARES são designados pelo número e pela natureza dos polígonos que se localizam em cada vértice. Para o $3^4.6$, por exemplo, cada vértice é formado por quatro triângulos eqüiláteros e um hexágono



2. OS DIAGRAMAS *(a)* de dobradura do mosaico ($3^2.4.3.4$) e os cilindros que correspondem às dobraduras em vermelho *(b)*, verde *(c)* e laranja *(d)*

o mesmo com os mosaicos ($3^4.6$) e (3.4.6.4), nos quais as faces poligonais não permanecem planas. Linhas atravessam os mosaicos (3.6.3.6) e (4^4), que podem ser dobrados no sentido dessas linhas, mas, ainda desta vez, os resultados são pouco interessantes.

Só restam então os mosaicos (3^6), ($3^3.4^2$) e ($3^2.4.3.4$), que não só podem ser dobrados, como enrolados em cilindro, como a estrutura de Yoshimura. Esses três mosaicos devem merecer a atenção dos engenheiros. Eles podem ser dobrados de várias maneiras. A figura 2 mostra quatro maneiras de dobrar o mosaico ($3^2.4.3.4$); os segmentos negros indicam as dobras em relevo, e os pontilhados, as dobras em cruz. A mesma figura mostra os respectivos cilindros vincados.

A estrutura das linhas de dobradura se repete na totalidade do plano. Os paralelogramos coloridos da figura 2 indicam a unidade básica. A menor unidade básica possível *(em vermelho)* tem uma superfície igual a dois quadrados e três triângulos. Um desses quadrados é dividido em duas partes que dariam um quadrado se as bordas opostas da unidade básica fossem coladas. É o único motivo de dobradura possível cuja unidade básica contém dois quadrados.

A segunda unidade básica *(em verde)* contém quatro quadrados e supõe-se também que ela seja a única dobradura com essa particularidade. A terceira *(em azul)* contém seis quadrados; há várias dobraduras desse tipo, e deixo aos leitores a possibilidade de encontrar outras. A última *(em laranja)* contém oito quadrados, e há novamente várias dobraduras desse tipo. Deixo também aos leitores a possibilidade de encontrar as que correspondam a (3^6) e ($3^3.4^2$).

Como ocorre na estrutura de Yoshimura, determinadas dobraduras assemelham-se à superfície obtida pelo achatamento de um cilindro real. Além disso, o achatamento pode ser simulado por computador; basta fazer como se as peças planas do mosaico sejam ligadas por um material elástico. Os resultados são úteis tanto em arquitetura como em inteligência mecânica. É sempre animador ver como a matemática reconcilia uma arte antiga com a modernidade.

***Ian Stewart** é professor da Universidade de Warwick, Inglaterra.*


5
10
10

Etnomatemática em ação

Como os conhecimentos matemáticos que cada um traz do seu próprio cotidiano podem ser absorvidos e aplicados nos contextos cultural e escolar

ESPECIALISTAS DEFENDEM que as experiências que as crianças trazem de casa ou da rua devem ser incorporadas nas aulas tradicionais

Por Maria do Carmo S. Domite

"A etnomatemática é um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com óbvias implicações pedagógicas."

Ubiratan D'Ambrosio

O objetivo deste artigo é refletir sobre etnomatemática dentro do contexto escolar, por isso considero importante iniciá-lo descrevendo três episódios – um deles na sala de aula do professor Mário, outro na aula da professora Renata e um terceiro na minha própria atuação como professora.

Esses exemplos não só vão ilustrar este texto com a identificação de situações pedagógicas que nos levaram, como professores, a refletir e legitimar saberes de alunos e alunas nascidos de experiências construídas em seus próprios meios, como servem para apreender parte de uma realidade escolar que pode funcionar como exemplo esclarecedor sobre os princípios da etnomatemática.

Vamos, então, ao primeiro episódio. Professor Mário leciona em um colégio na periferia de São Paulo. Há algum tempo nós vínhamos refletindo – de modo a iniciar um trabalho de etnomatemática na escola – sobre como nós, professores e professoras, precisamos rever nossas atitudes frente ao conhecimento matemático dos alunos e como lidar com esse saber que vem de casa e o dito conhecimento escolar. Da nossa conversa, tínhamos decidido que, sempre que possível, Mário iniciaria a aula de matemática pela fala dos alunos e alunas, a partir de questões, não só específicas da matemática, como mais gerais, do tipo: "O que vocês sabem sobre...?" ou "Como vocês entendem tal coisa...?".

A Divisão dos Faróis

DENTRO DESTA PERSPECTIVA, o professor organizou em uma de suas turmas de 5ª série um debate sobre a noção matemática de divisão. Em um dado momento, Mário perguntou: "Como vocês fazem o cálculo 125 dividido por 8?". Enquanto alguns alunos começavam a escrever algo em seus cadernos, José, um aluno que vendia chicletes e balas, em um farol, após o período de aula, contou:

"Nós somos mais ou menos dez caras, quase todo dia, alguns meninos e algumas meninas. Daí, dividimos assim: mais para as meninas que são mais responsáveis que os meninos, mais para os maiores do que para os menores". Intrigado, o professor pediu exemplos de como tinha sido feita essa divisão nos dias anteriores, ao que José respondeu: "Ah! Assim... eram 4 meninas, 1 é das pequenas; 6 meninos grandes e 2 mais ou menos pequenos. Então, nós éramos mais ou menos 12 e os chicletes eram 60. Daí, foi dado metade e metade, um pouco mais para as meninas. A menina pequena ficou com 3 e as outras com 6 ou 7, eu não me lembro bem...Os meninos"...

Neste momento, Mário sentiu que estava com dificuldade para fazer intervenções, sobretudo porque estava lidando com problemas genuínos de comunicação e com uma situação, dentro do contexto escolar, que levava em conta argumentos próprios de um grupo social diferenciado. Algumas perguntas começaram a ser formuladas em sua cabeça: "Qual o potencial de levar em conta o modo de raciocinar daquele que está aprendendo para o processo de aprendizagem e ensino?"; "É verdade que ao colocarmos o trabalho da sala de aula a serviço de uma situação que emerge do grupo estamos atuando não só no desenvolvimento intelectual do aluno como também social?"; "Estaria surgindo aqui uma pedagogia na direção da etnomatemática em contraste com a perspectiva do ensino centrado e conduzido pelo professor?".

Assim, repleto de questionamentos, Mário decidiu dar mais oportunidade a este movimento pedagógico – tão diferente daqueles que, em geral, têm sido conduzidos em uma sala de aula de matemática, sobretudo pelo fato de levar em conta uma noção de divisão diferente daquela elaborada pela matemática universalmente reconhecida – pedindo ao José que organizasse uma atividade junto aos alunos, semelhante àquela do seu trabalho no farol.

Área Guarani

O SEGUNDO EPISÓDIO se deu no contexto da educação indígena. Como professora do Curso de Formação do Professor Indígena do Estado de São Paulo, em meados de 2003, iniciei uma conversa, em sala de aula, com um grupo de professores guarani sobre a noção de área. Na ocasião, perguntei: "O que é área?"; "Quando vocês falam ou pensam sobre área, sobre o que estão falando ou pensando?".

De início, os professores indígenas, por alguns minutos, não se manifestaram. Daí, enquanto alguns começaram a ensaiar explicações, como "isso tem a ver com demarcação de terra" ou "a área de um quadrado é em metros qua-

PARA OS ÍNDIOS guarani, o metro não é uma medida fixa. Eles consideram que se trata da distância do umbigo de uma pessoa em pé até o chão

FAZER UMA DIVISÃO no dia-a-dia é uma conta muito mais complexa para o estudante que vende balas do que a que ele aprende na escola. Em vez de entregar uma porção igual para cada colaborador, ele leva em conta também o sexo e a idade dos colegas

drados...", o professor Toninho Macedo levantou, foi para frente da sala e gesticulando – quase como que dançando – começou a falar:

"O metro para nós é essa distância daqui do umbigo ao chão. Isto mede 1 metro. A casa de um guarani tem no ponto mais alto, a nossa altura mais meio metro". (Toninho mostra a sua altura com a mão sobre a cabeça e aponta para cima com as mãos formando um triângulo dizendo *mais meio metro.)* "A área da casa é 2 x 4 metros. Nos cantos ela tem a nossa altura." (Toninho mostra a sua altura pondo a mão sobre a cabeça.) "Então dá para ficar de pé até o canto." Aí, Toninho girou, quase como que dançando, e explicou uma vez mais a casa guarani.

Nesse momento, assim como aconteceu com o professor Mário, inúmeras perguntas começaram a surgir na minha cabeça, algumas bem parecidas com as dele: "Uma pedagogia na direção da etnomatemática, em contraste com a perspectiva do ensino conduzido pelo professor, deveria lidar com o ensino-aprendizagem da noção de área a partir do formato e da medida da casa guarani?"; "Qual o sentido matemático da medida de área, para os guaranis, fora do contexto prático?"; "Os saberes contextualizados dos alunos e alunas, quando levados em conta, contribuem para uma aprendizagem, pela escola, mais significativa, assim como podem dar aos alunos/as mais poder e domínio sobre sua aprendizagem?".

Medidas das Receitas

O TERCEIRO EPISÓDIO se deu no contexto do ensino privado, numa escola particular de São Paulo. A professora de matemática Renata fez o seguinte relato na aula da minha disciplina de metodologia de ensino da matemática, no curso de pedagogia da Faculdade de Educação da USP. Ao entrar em uma classe de 6ª série, Renata encontrou os alunos discutindo sobre várias receitas – para fazer pão – que eles trouxeram de casa, tarefa deixada pela professora de biologia.

Na verdade, a discussão girava em torno do modo como a aluna Manuela apresentava as medidas dos ingredientes. Ela usava as unidades *colher de chá, colher de sopa* e *xícara*, chamando-as de *teaspoon, tablespoon* e *cup*. "Minha avó, que é americana, usa essas medidas dizendo que são as medidas do sistema inglês, que não tem como comparar com o modo de medir decimal ou, não me lembro bem... diz que não sabe transformar para o nosso sistema. Eu vou trazer o jogo de colherinhas que ela usa e também o copo", explicou Manuela.

Ela chamou atenção também para o modo como a avó media 1/3 de copo de manteiga: "Minha avó enche o copo com água até 2/3, daí vai pondo manteiga até ele ficar todo cheio de água e manteiga". A professora Renata, então, interferiu, convocando a turma a conversar sobre o modo de medir da avó da Manuela. "Vamos pensar juntos sobre outros modos de medir?"; "Vamos conversar, em casa, sobre as maneiras usadas para medir?", incitou os alunos.

A partir do relato de Renata, passei, cada vez mais, a visar a possibilidade de o professor detectar os conhecimentos (matemáticos) prévios dos estudantes e procurar caminhos para utilizá-los na criação e solução de novos problemas. Em outras palavras, passei a me preocupar com a mudança de duas atitudes psicocognitivas freqüentes nos professores de matemática: primeira, o educador, em geral, procura transformar os alunos sem preocupação alguma de, antes, compreendê-los e, segunda, o professor, em geral, não considera a cultura primeira

PARA MEDIR as quantidades dos ingredientes de uma receita cada cozinheiro costuma seguir sua própria matemática. Em vez de usar recipientes com graduação exata, muitos preferem medir "a olho" com xícaras e colheres

do aluno – parece que o que o estudante sabe e do jeito que sabe, não vale a pena ouvir ou tentar entender.

Do que foi até aqui relatado, queremos refletir junto ao leitor que o exercício de operacionalização de atitudes pelos professores e professoras em levar em conta o que o educando pensa, como ele ou ela vê, é não somente um grande desafio, mas o germe do processo etnomatemático – um movimento pedagógico que tem no seu âmago questões como diálogo, legitimação do conhecimento do "outro", relativização e respeito à diferença de valores, conhecimentos, modos e códigos.

Seja como for, como vimos, o professor que se propõe, em sala de aula, a evidenciar os "saberes" dos alunos – concepções, conhecimentos, linguagem, sobretudo como o "outro" pensa – ou conhece no âmbito das relações quantitativas e espaciais não tem um trabalho simples pela frente.

Ao contrário, dependendo da forma como ele atuar pode decorrer todo tipo de conseqüências pedagógicas, favorecendo ou dificultando a aprendizagem e o ensino. No entanto, de nossa parte, inspirados e fundamentados em pesquisadores como Ubiratan D'Ambrosio e Paulo Freire, consideramos como pressuposto básico para a realização de um processo pedagógico – que busca corresponder a uma perspectiva etnomatemática – a disponibilidade do professor de matemática em conhecer mais intimamente o educando em suas especificidades – conhecer e levar em conta no processo de aprender e ensinar conhecimentos anteriores dos estudantes (intelectuais, artísticos, entre outros), suas preferências, situação familiar e econômica.

Na verdade, quando perseguimos este caminho como professores acreditamos que cada aluno tem uma história, ou melhor dizendo, é uma história. Cada estudante reage diferentemente às situações de vida que precisa ou deseja confrontar. Daí, o ensino deve ser visto como um aspecto do desenvolvimento dessa história, que tanto interfere no crescimento mental deste indivíduo, aluno, como tem o papel de transformar a sua articulação no e com o mundo e com os outros.

Várias Influências

E O CONHECIMENTO matemático, como os números, as formas, as propriedades, enfim as relações quantitativas e espaciais também devem ser trabalhados pelos professores como relações que combinam com outras inúmeras influências – de modo aleatório, mas sempre no sentido de proporcionar novas transformações e organizações psicointelectuais. Dentro desta visão, toda formação dessa natureza é, na verdade, um fenômeno de proporções cósmicas – uma vez que estaria interagindo com o emocional, o afetivo, o social, o histórico, o psicológico, o místico, o cultural, entre outros.

Da nossa reflexão e imbuídos do valor e papel de uma atitude etnomatemática para encaminhar o processo pedagógico da matemática, estamos em busca de trabalhar junto aos nossos estudantes a partir da compreensão de que: não é possível desenvolver alguém intelectualmente e afetivamente de modo isolado de sua vivência sociocultural; e que a aprendizagem (da matemática) não é um momento estanque na vida do indivíduo, mas sim uma negociação com o universo de conhecimento já existente, na interação com os novos saberes. SA

Maria do Carmo S. Domite é professora da Faculdade de Educação da USP e coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática.

PARA CONHECER MAIS

Tantos povos, tantas matemáticas. Ubiratan D'Ambrosio, em *Educação*, novembro de 1997, nº199, págs.3-5.

Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. Ubiratan D'Ambrosio. Autêntica, 2002.

Da Etnomatemática: construindo de fora para dentro da escola. Maria do Carmo S. Domite, em *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática – VI ENEM*, vol. 2, págs. 101-102, julho de 1998.

Notas sobre a formação de professores e professoras numa perspectiva da etnomatemática. Maria do Carmo S. Domite, em *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática-CBEm1*, págs. 71-77, 2001.

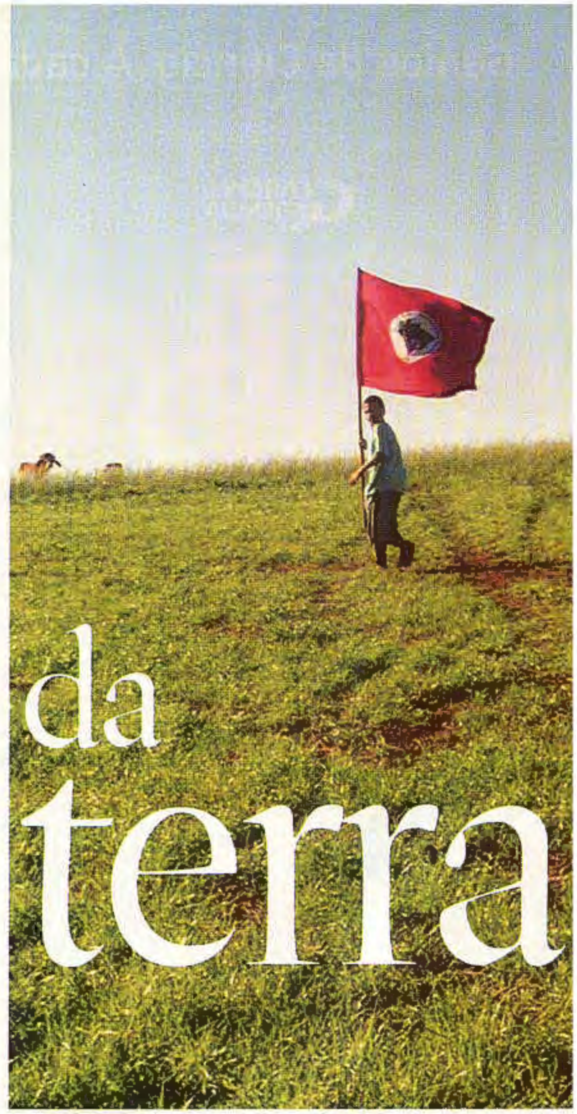
A pedagogia do oprimido. Paulo Freire. Editora Paz e Terra, 1987.

Por uma pedagogia da pergunta. Paulo Freire e Antonio Faundez. Editora Paz e Terra, 1986.

Camponeses desenvolvem práticas de medir terreno diferentes das oficialmente realizadas

Por Gelsa Knijnik

A matemática da cubação da terra



NA LUTA PELA reforma agrária, camponeses criaram um método próprio de calcular a área de plantio

A luta pela reforma agrária no Brasil desenvolvida pelo Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra tem sido apontada por muitos cientistas sociais como uma das importantes mobilizações da sociedade civil na direção de mudanças que possam produzir a diminuição da desigualdade social do país. Após 20 anos de existência, a força desse movimento camponês (hoje envolvendo aproximadamente 250 mil famílias distribuídas em 23 estados brasileiros) pode ser avaliada por sua visibilidade no cenário nacional e internacional e pela colaboração dada ao movimento por pesquisadores de mais de 50 universidades brasileiras, em suas respectivas áreas do conhecimento. Como parte desse trabalho, estudos etnomatemáticos sobre a cultura camponesa sem terra vêm sendo realizados, trazendo à cena discussões sobre práticas culturais e política do conhecimento matemático.

Na luta pela reforma agrária, a importância que possui o acesso a um lote – para nele viver e produzir – faz com que a prática de medição da terra – cubação, na linguagem camponesa – tenha importância significativa na vida dos assentamentos: antes de os órgãos oficiais mensurarem o tamanho dos lotes destinados a cada uma das famílias assentadas, os camponeses precisam demarcar os espaços destinados à agrovila e à produção. Além disso, o próprio planejamento do processo produtivo, que imediatamente precisa ser iniciado, exige que cálculos de áreas sejam feitos.

A cubação da terra tem inspirado pesquisas etnomatemáticas, cujos resultados apontam para uma multiplicidade de procedimentos associados a essa prática, distintos entre si, mas que são, muitas vezes, praticados em uma mesma comunidade, em especial quando ela é formada por famílias oriundas de diferentes regiões.

Linguagem Camponesa

ESTA MATEMÁTICA camponesa – designação que temos dado a práticas da cultura do campo como a da cubação – é produzida por uma linguagem que em muito se afasta daquela utilizada pela matemática acadêmica e pela escolar. Como todas as narrativas, as que constituem a matemática camponesa, produzidas por uma linguagem carregada de significados culturalmente situados, são contingentes. A própria

expressão cubação da terra e os modos de narrar os procedimentos dessa prática são exemplos disso. Assim, neste artigo, ao ser necessário (por limitações de espaço) descrever tais procedimentos através do uso de uma linguagem oriunda da matemática escolar, estamos cientes do quanto em nossa descrição a singularidade e os matizes que marcam a cultura dos sem-terra estão sendo elididos. Com isso, a cultura camponesa se torna objeto de um "seqüestro", pois é expressa por outra linguagem, diferente da que a constitui. As descrições dos procedimentos da prática de cubação da terra que a seguir apresentamos são, portanto, somente vestígios que restaram nesse processo de transmutação produzido pelo rigor e abstração que a matemática escolar tem tomado emprestado da acadêmica.

A cubação envolve duas etapas. Inicialmente, há a medição das divisas – limites da porção de terra cuja área será determinada. A seguir, são postos em ação os cálculos que resultarão no valor da área. Nas comunidades do sul do país, usualmente, a medição das divisas da terra é realizada com uma corda – também chamada soga. Os camponeses que efetuam a medição percorrem as divisas da superfície de terra, medindo-as por partes. Utilizam como unidades de medida as do sistema métrico decimal (o que nem sempre ocorre, por exemplo, no Nordeste brasileiro, onde são também usadas outras unidades de medida, próprias da cultura camponesa daquela região). Em geral, quando a superfície é muito acidentada, ela é subdividida para fins de medição. Através desse processo, a área que será de fato calculada é denominada desenvolvida ou efetiva: ela leva em consideração as ondulações, inclinações e acidentes altimétricos. Assim, as grandezas lineares são medidas no terreno segundo suas próprias inclinações. O valor resultante desse cálculo difere, em geral, daquele que é encontrado na determinação da área topográfica, obtida através da projeção da superfície dada sobre um plano horizontal, o que produz uma área plana limitada pelo contorno da superfície. Mesmo sendo essa a área que interessa para fins de escrituração legal das terras, na hora de pedir financiamento bancário para apoio a atividades relacionadas à produção ou construção de moradias, os camponeses calculam a área efetiva, por eles chamada de cubação.

Determinadas as medidas das divisas da terra, os camponeses iniciam o processo de cálculo da área que ficou delimitada. No sul do país, dois são os procedimentos que têm sido observados na prática de cubação de uma terra de 4 divisas, o correspondente a um quadrilátero qualquer. O primeiro consiste em inicialmente adicionar, dois a dois, os lados opostos do quadrilátero, encontrando-se a seguir a média desses pares de segmentos (isto é, dividindo-se por 2 cada uma das somas dos pares de lados). Em seguida, os dois valores obtidos são multiplicados. Nesse procedimento, o quadrilátero inicialmente dado é transformado em um retângulo (através da determinação da média entre os lados opostos) e sua área é a seguir calculada, por meio da multiplicação da medida de um lado pela do outro (como realizado usualmente no cálculo elementar da área de um retângulo).

Esse modo de operar, observado em assentamentos do sul do país, apresenta peculiaridades que merecem ser destacadas. A primeira diz respeito ao valor obtido através desse procedimento. É sempre igual (no caso de a terra ter o formato retangular) ou superior ao que se obteria por métodos utilizados na matemática escolar – como, por exemplo, aquele que calcula a área de um quadrilátero mediante um processo de triangulação (partição do quadrilátero em 2 triângulos, construídos com uma das diagonais do quadrilátero) e posterior aplicação da Fórmula de Heron (que determina a área de um triângulo a partir da medida de seus lados).

Técnica Egípcia

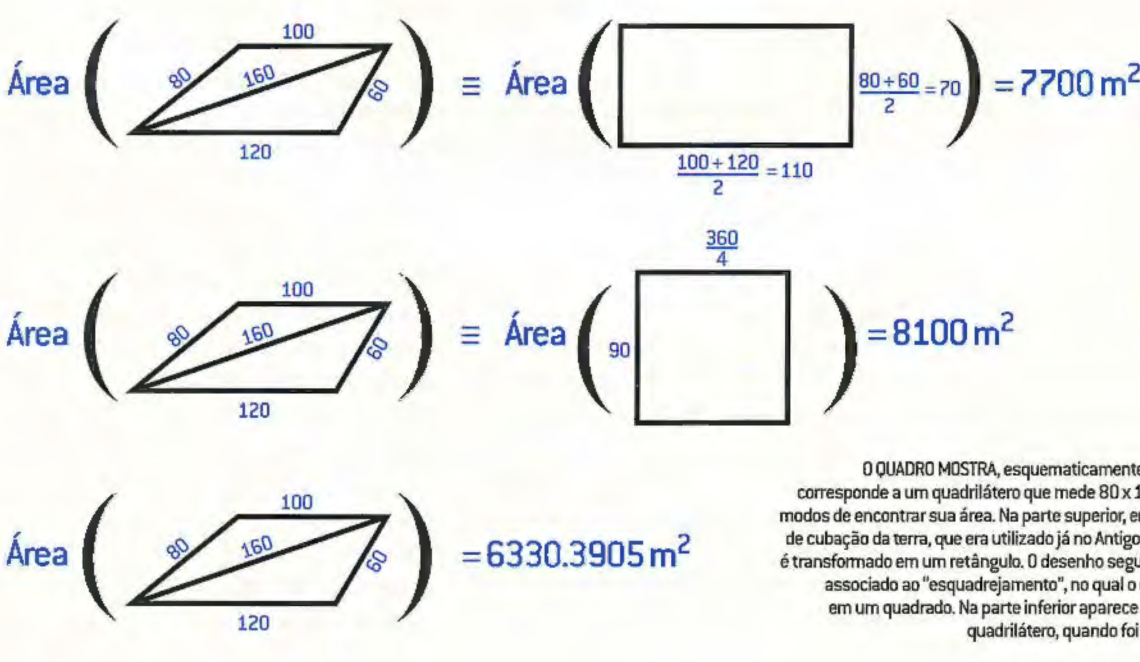
Um segundo aspecto a ser destacado consiste em uma referência histórica. Pesquisadores como o egiptólogo Eric Peet afirmam haver evidências históricas que os levam a afirmar que o método de cálculo acima descrito era usado já nos períodos ptolomaicos, romanos e cópticos do Egito, para fins de taxação. Além disso ele argumenta que os proprietários de terras do Antigo Egito, diferentemente do que em geral ocorre com os camponeses do sul do país, estavam cientes de que seus cálculos para determinação de área de um quadrilátero tinham um caráter aproximado, produzindo resultados numéricos superiores aos que efetivamente deveriam corresponder à superfície medida.

É interessante também observar a aplicação desse procedimento de cubação da terra quando a superfície tem o formato triangular. Como explicou a professora de uma escola de assentamento, "se a terra é do jeito de um triângulo, eles pegam a base e lá em cima eles tocam um zero". Ao "tocar um zero" em um dos vértices do triângulo, os camponeses identificam o polígono de três lados com um quadrilátero, considerando que este tem um de seus lados nulo. Feita essa identificação, aplicam o procedimento descrito para a cubação da terra de 4 divisas.

Nos dias de hoje, o procedimenro de cubação de uma terra com a forma de um quadrilátero e também sua extensão para terras de formato triangular vem sendo usado não só no sul do país. Encontra-se também presente em assentamentos do Nordeste brasileiro e em comunidades rurais de diferentes regiões do Chile, conforme indicam estudos realizados nesses contextos.

Nos estados do Sul ainda é observado outro procedimento na cubação da terra. Esse procedimento, quando aplicado a

GEOMETRIA PARTICULAR DO CAMPO



O QUADRO MOSTRA, esquematicamente, uma "porção de terra", que corresponde a um quadrilátero que mede 80 x 100 x 60 x 120 metros, e três modos de encontrar sua área. Na parte superior, encontramos o procedimento de cubação da terra, que era utilizado já no Antigo Egito, no qual o quadrilátero é transformado em um retângulo. O desenho seguinte mostra o procedimento associado ao "esquadrejamento", no qual o quadrilátero é transformado em um quadrado. Na parte inferior aparece o cálculo da área do mesmo quadrilátero, quando foi aplicada a fórmula de Heron

PEQUENO AGRICULTOR do sul do país mostra como faz para medir o terreno sem as fórmulas tradicionais da matemática

uma superfície que corresponde a um quadrilátero qualquer, consiste em somar os quatro lados do polígono, dividindo a seguir o resultado por 4. Assim, o quadrilátero é transformado em um quadrado, cujo lado é a quarta parte do perímetro do polígono inicial. É calculada então a área do quadrado (elevando-se ao quadrado o valor da medida do lado), que será indicada como correspondendo à área do quadrilátero inicialmente dado. Esse procedimento – chamado, em algumas comunidades, esquadrejar a terra – quando aplicado a uma superfície que já possui forma quadrangular, coincide com o modo anterior de cubar a terra. No entanto, em geral, para uma mesma superfície, os resultados obtidos através do esquadrejamento da terra são superiores aos obtidos pelo processo que já era utilizado no antigo Egito.

Além dessas estratégias, alguns camponeses do sul do país usam outro tipo de estratégia para dar conta de suas necessidades de definir uma superfície de terra para o plantio. Diferentemente dos outros dois procedimentos (nos quais a porção de terra está dada e é necessário determinar sua área), há um valor de área previamente definido, e a questão consiste em demarcar, no solo, o espaço que corresponderá ao valor estipulado.

Matemática do Trator

POR EXEMPLO, com o intuito de delimitar, para cultivo, uma "terra de 100 por 100", que equivale à área de 1 hectare, há assentados que utilizam como parâmetro para determinar o tamanho de tal superfície o tempo gasto com o trator para carpir o terreno, isto é, o tempo necessário para preparar a terra. Como explicou um camponês: "A gente põe o trator em cima da terra. Trabalhando com ele três horas, dá certinho 1 hectare". Nessa situação da vida cotidiana do campo, tempo e espaço estão identificados, mesclados: o tempo de 3 horas é 1 hectare, e um hectare são 3 horas. É o trator – mais precisamente os custos envolvidos em seu uso – que produz a relação, que estabelece uma estreita vinculação entre tempo e espaço.

Para fins do cultivo em seu assentamento, possivelmente a hora de uso de trator seria um dado mais relevante para o camponês que uma eventual precisão relativa à área a ser plantada: "Uns metros a mais, uns a menos não fazem tanta diferença", explicou. Na precariedade de recursos que são disponibilizados para dar impulso aos assentamentos da reforma agrária, diferença faz o custo da produção, principalmente aquela na qual é requerido maquinário. Estão implícitos em tal modo de operar com a demarcação de 1 hectare as especificidades do solo e do próprio trator que nele será usado. São elas que entram em jogo na definição do tempo de 3 horas. A experiência do camponês na labuta na terra dá a ele as indicações das modulações – temporais e espaciais – necessárias para os ajustes que deverá fazer em cada situação.

A prática da cubação da terra apresentada neste artigo apontou para um dos modos de operar da racionalidade dos homens e mulheres do campo, que produz isso que chamamos etnomatemática camponesa. Ela é composta ainda por outras práticas presentes na vida dos assentamentos, como, por exemplo, a cubagem da madeira (que envolve o cálculo do volume de um tronco de árvore). Todas elas têm as marcas da cultura camponesa sem terra, que se move pelo empenho em subsistir no campo, pela luta por um projeto coletivo de mudança social. SA

Gelsa Knijnik é professora da Universidade do Vale do Rio dos Sinos, RS.

PARA CONHECER MAIS

Educação matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra. Gelsa Knijnik. Edunisc (no prelo).

Etnomatemática, currículo e formação de professores. Gelsa Knijnik, Fernanda Wanderer e Cláudio Oliveira (orgs.). Edunisc, 2004.

Eles têm uma lógica própria, medem o tempo com tiras de taquara, contam somente até cinco, mas conseguem entender com base na prática questões complexas como a lei da refração

Racionalidade dos índios brasileiros

Por Eduardo Sebastiani Ferreira

Iniciei meu trabalho de formação do professor/índio pesquisador, no sentido etnográfico, na década de 1980, com o povo tapirapé, que habita a região norte do Mato Grosso, às margens do rio Araguaia. Na época em que iniciei o trabalho havia somente uma aldeia, com uma população de cerca de 300 índios. Senti, logo no início de minhas pesquisas em etnomatemática, na tentativa de formar este professor/índio, a dificuldade de compreender a racionalidade por eles utilizada. Acredito que das críticas à etnomatemática, a mais fundamentada é a da educadora americana Wendy Millroy quando diz: "Como pode alguém que foi escolarizado dentro da matemática ocidental convencional 'ver' qualquer outra forma de matemática que não se pareça com a que lhe é familiar?". Lembro-me, também, com freqüência das palavras de Paulo Freire em uma das reuniões do Clube da Rúcula (grupo de estudos de etnociência que recebeu esse nome por causa do hábito de Freire, e nosso também, de comer a verdura quando bebia cachaça): "Você deve emergir de sua cultura e molhado dela ver a cultura do outro". Isto é, nunca podemos "ver" uma cultura diferente da nossa de modo imparcial.

Várias situações que presenciei ao longo desses anos me fizeram refletir bastante sobre o melhor modo de analisar a racionalidade de uma cultura diferente da nossa – no meu caso, de algumas nações indígenas brasileiras. Quando eu e o cacique tapirapé (que é o diretor da escola) estávamos matriculando os alunos que iriam estudar, ele impôs que um garoto, que ainda não tinha idade suficiente para freqüentar a escola, fosse matriculado também. Ele argumentou que se o companheiro do menino iria estudar, ele tinha necessariamente de fazê-lo também. Em

ALDEIA DOS ÍNDIOS waimiri-atroari, que possuem vocábulo apenas para os números 1, 2, 3, 4 e 5

O KATYBA é o convite da festa mais importante para os waimiri-atroari, o Maryba. Além da função de convocar os caciques das outras tribos, ele funciona como um verdadeiro calendário para que o convidado se oriente sobre os preparativos da festa outros momentos da vida da tribo, sempre aparecia a busca do companheiro, isto é, para eles a unidade básica eram duas pessoas, ou duas coisas. "Nada sobrevive sozinho" era uma frase que escutava muitas vezes, mesmo não sendo para pessoas ou animais. Como eles são monogâmicos, pude inferir que essa construção de a unidade ser o dois é social, tomando como base a formação do casal como unidade familiar.

Conhecimento da Refração

OUTRO FATO INTERESSANTE DA ALDEIA tapirapé ocorreu no dia em que um dos índios resolveu me ensinar a pescar com arco e flecha. Evidentemente que não aprendi. Mas, ele de pé no barco lançou a flecha na metade da distância entre onde víamos o peixe e a proa do barco e conseguiu pescá-lo. Minha primeira reação foi de espanto: como ele podia conhecer a lei da refração? Perguntei como ele sabia que deveria atirar a flecha não no ponto onde víamos o peixe e sua resposta foi ainda mais intrigante: "O peixe não estava lá, os olhos da gente estão errados".

Quando voltei a Campinas, trouxe este fato para o grupo que tínhamos na época no Instituto de Artes da Unicamp, onde discutíamos cultura popular, e a análise que fizemos para mim foi conclusiva. Somos de uma cultura judaico-cristã, na qual existe a crença de que fomos feitos à imagem e semelhança de Deus – ser perfeito –, portanto não admitimos que podemos ter algo errado no nosso corpo. Para responder ao fenômeno da refração inventamos uma lei física, e com este pressuposto criamos toda nossa ciência. Para o índio, como não existe essa crença de ele ser imagem e semelhança de um ser perfeito, é possível explicar o fenômeno atribuindo um defeito aos olhos, e assim compreender algo que lhe foi passado pelos seus antepassados, ou aprendido por experiência própria.

Depois de trabalhar com várias nações indígenas no Brasil, atualmente realizo meus estudos com os waimiri-atroari, que habitam o norte do estado do Amazonas e parte de Roraima. A população é de cerca de 1.100 índios distribuídos em 18 aldeias. Cada uma é uma grande casa (maloca), onde moram cerca de cem pessoas. Após mais de 18 anos de trabalho, hoje eles já fazem pesquisas de campo de sua cultura e trazem os dados para podermos analisá-los do ponto de vista etnomatemático e juntos formularmos ações pedagógicas para eles aplicarem em suas escolas.

Contagem até Cinco

ASSIM COMO OS ÍNDIOS MUNDURUCUS do sul do Pará, os waimiri-atroari contam somente até cinco, pelo menos é só até esse número que eles têm um vocábulo: 1 é awynimi; 2, typytyna; 3, takynyma; 4, takynynapa; e 5, warenypa (que significa uma mão). Alguns professores índios resolveram durante o curso de formação continuar a numeração até dez na língua, usando o processo de adição. Assim, por exemplo, o sete foi denominado de takynyma takynynapa (3 + 4) etc. Quando voltaram para suas aldeias e foram discutir isso com as lideranças, a idéia foi totalmente rechaçada. A alegação dos líderes foi que eles estavam alterando a língua e como a escola era um elemento não-indígena, apesar de todos eles valorizarem-na muito, quando os professores fossem ensinar numeração acima de cinco deveriam utilizar a nomenclatura do português. Na escola as crianças são alfabetizadas nas duas línguas, a materna e o português.

O "Calendário" Katyba

A FESTA MAIS IMPORTANTE PARA OS waimiri-atroari é o Maryba, iniciação do índio ainda criança, cerca de 5 anos. Essa festa dura três dias, com cantos o tempo todo, danças e comidas.

O pai do indiozinho que será iniciado confecciona os convites para festa e os leva de aldeia em aldeia para os respectivos caciques. Esse convite é o katyba, que é feito de tiras de taquara com um lado lustroso e outro opaco. Essas tiras são amarradas com cipó e é feito um corte em duas delas *(ver figura na pág. 91)*. Quando um cacique de uma aldeia recebe o katyba, ele passa o período que se segue até o evento virando, uma por dia, as taquaras para o lado opaco. Quando chega na primeira marca é o sinal de que toda a sua aldeia deve preparar as comidas – são

DESENHO DE CRIANÇA representa o momento em que um índio entrega o katyba para o cacique de outra tribo convidando-o para a festa de iniciação de seu filho

NA ALDEIA INDÍGENA TAPIRAPÉ, às margens do rio Araguaia, no Mato Grosso, a unidade básica de numeração é o dois. Lá praticamente tudo é feito em duplas porque se acredita que nada, ou ninguém, pode sobreviver sozinho

os convidados que levam os alimentos que serão consumidos na festa. A segunda marca indica que devem iniciar a caminhada até a aldeia onde a comemoração será realizada. Como as aldeias estão espalhadas pela reserva, cada katyba é diferente, pois o tempo que leva para ir de uma a outra é diferente. Ele é um marcador de tempo para os waimiri-atroari.

Os professores/índios fizeram muitos outros trabalhos usando seus conhecimentos do dia-a-dia e os modelaram matematicamente para serem usados nas suas escolas, como as construções de maloca, canoa, remo, flechas, roça etc. Assim puderam utilizar seus saberes para introduzir a matemática ocidental às crianças com significado contextualizado.

Lógica Própria

ESTOU SEMPRE NA BUSCA DA racionalidade deles, esta é e sempre foi minha maior preocupação, principalmente no tipo de lógica que utilizam. É um trabalho exaustivo, pois sei que posso encontrar um caminho nos mitos, que muitas vezes não são contados por fazerem parte do conhecimento místico. Acredito que eles têm uma lógica diferente da aristotélica, utilizada pela civilização ocidental e contrária ao que pensava Lévy-Brühl. Para ele existe somente uma lógica, o que muda são suas representações. Roberto Cardoso de Oliveira fez uma análise desse pensamento: "Um dos conceitos mais importante que introduz Lévy-Brühl é de 'representação coletiva': ele procura associá-la a um determinado componente místico que para ele é inerente às representações 'primitivas'. Apesar de a representação ser, por excelência, um fenômeno intelectual ou cognitivo, tal não ocorre da mesma maneira no caso das 'representações coletivas primitivas'. Pois para mentalidade primitiva, 'os elementos emocionais e motores são partes integrantes das representações. (...) E, com efeito, para conservar o termo, é necessário modificar o sentido' – assevera L-B. – 'É necessário entender, por esta forma de atividade mental entre os primitivos, não um fenômeno intelectual ou cognitivo puro, ou quase puro, mas um fenômeno mais complexo (...)".

Minha primeira investida na busca da racionalidade waimiri-atroari foi com os silogismos. Iniciei explicando 'como o branco pensa' (para eles os não-índios são denominados brancos, independente da raça), mostrando alguns silogismos clássicos e outros do cotidiano deles, como por exemplo: "Todo índio waimiri-atroari caça com arco e fecha, Marcelo é um waimiri-atroari, logo Marcelo caça com arco e flecha". Isto era mais que natural para eles, pois Marcelo é um professor waimiri-atroari e todos sabiam que ele caçava com arco e flecha. Quando solicitei que construíssem silogismos obtive frases do tipo: "Todo waimiri-atroari pesca pirarucu, Pedrinho caça, logo Davi é casado". Todas as afirmações são verdadeiras, mas não seguem um caminho lógico para o silogismo. Acredito que o que significou para eles um silogismo eram verdades que conhecem. Foram incapazes de construir silogismos descontextualizados de suas realidades.

Continuo minha busca da racionalidade pelo menos nos waimiri-atroari. Sei que é uma grande pesquisa em relação ao tempo que devo empregar, mas é um grande desafio que encontro pela frente. SA

***Eduardo Sebastiani Ferreira** é pesquisador colaborador do Núcleo Interdisciplinar de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp.*

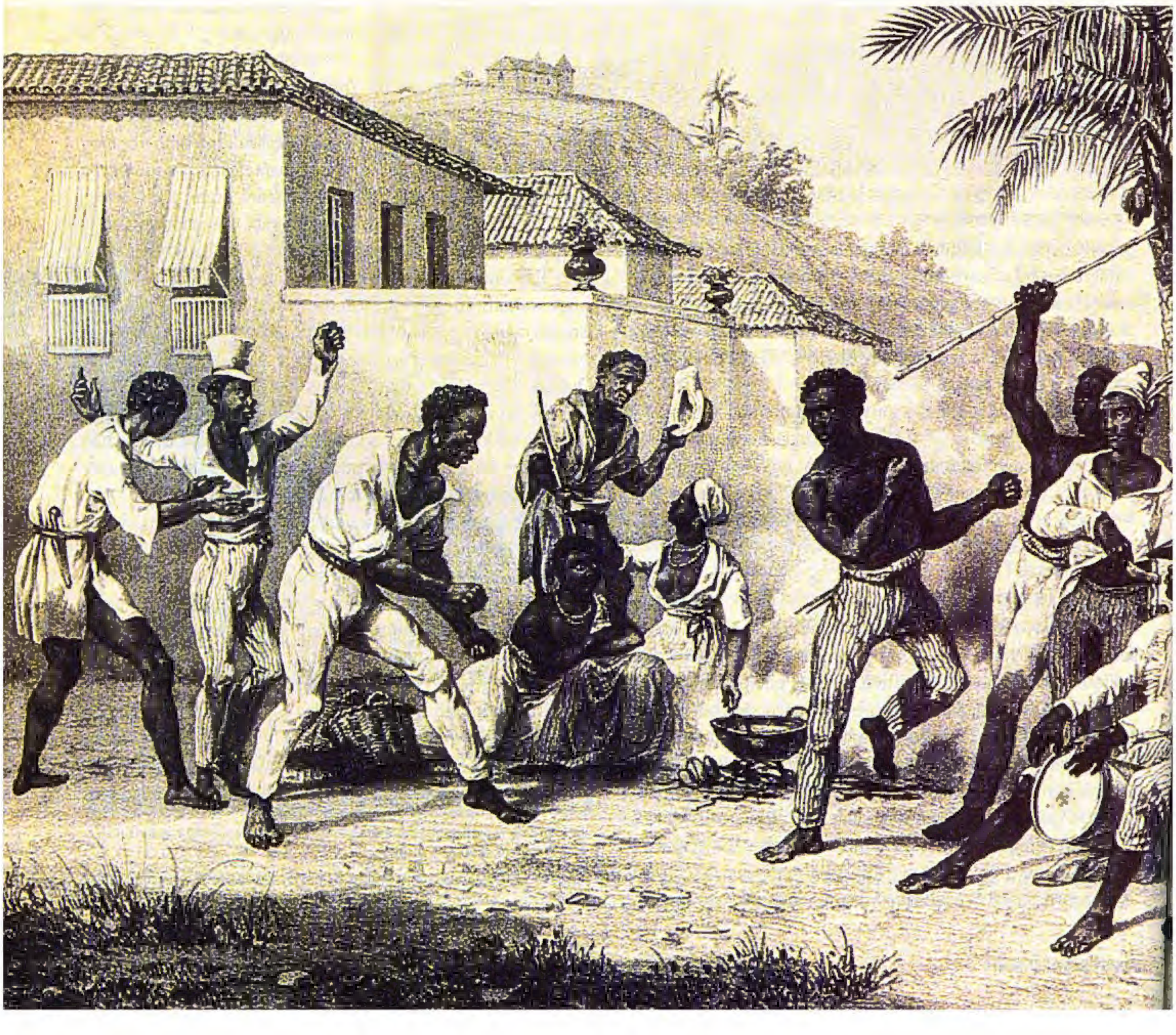
PARA CONHECER MAIS

Exclusão e resistência. Educação matemática e legitimidade cultural. G. Knijnik. Artes Médicas, 1996.

Razão e afetividade: o pensamento de Lucien Lévy-Brühl. Roberto Cardoso de Oliveira. Coleção CLE – Unicamp, 1991.

Matemática mítico-religiosa-

Os conhecimentos e a cultura que os negros africanos trouxeram para o país foram reelaborados para a nossa realidade e constituem hoje novos saberes



Por Wanderleya Nara Gonçalves Costa
e Vanisio Luiz da Silva

-corporal do negro brasileiro

A CAPOEIRA que chegou ao Brasil foi modificada para atender às necessidades dos escravos

BIBLIOTECA MUNICIPAL MÁRIO DE ANDRADE, SP

Do cotidiano de muitos negros brasileiros emerge um tipo de matemática que é produzida pelo próprio corpo, considerado instrumento de ligação do ser humano com o sagrado, forma de expressão de uma religiosidade que se baseia em mitos ancestrais. Os antigos africanos escravizados no país buscavam na religiosidade força para superar a degradante situação em que se encontravam. Ela lhes incitava a inteligência, levando-os a desenvolver diferentes tipos de conhecimentos, inclusive matemáticos, além de estratégias de resistência e sobrevivência.

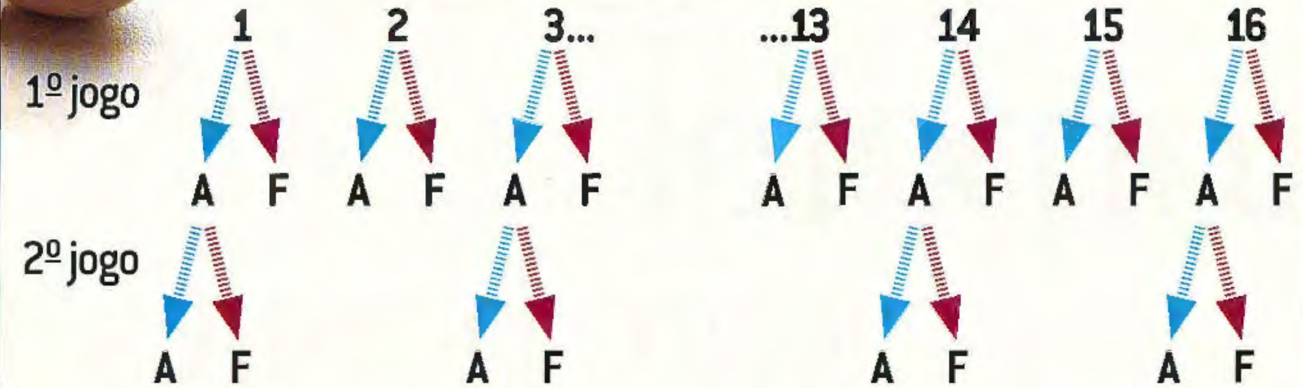
Esse "modo de saber do povo negro brasileiro" não se refere ao conhecimento trazido da África pelos escravos, mas ao que Henrique Cunha Júnior, da Universidade Federal do Ceará, chama de *africanidades brasileiras*. Elas constituem um saber novo, (re)elaborado pelas pessoas escravizadas e por seus descendentes a partir da diversidade cultural africana e da compreensão e convivência com novas realidades, novos embates políticos e sociais. No interior das senzalas havia uma convivência entre pessoas de culturas muito diversas, o que funcionava como engenhosa manobra do sistema escravista para evitar rebeliões.

Por outro lado, as fugas uniam negros de diferentes culturas que se organizavam nos quilombos para resistir à escravatura e à opressão. Nesses locais, plantavam, colhiam, pescavam, caçavam, manufaturando objetos de palha; organizando-se em grupos, gerenciavam seu próprio sistema de produção e defesa de forma a viver independentes das cidades. Para tanto, e também para exercer sua religiosidade e liberdade, resgataram conhecimentos oriundos de suas várias culturas, criaram e recriaram conhecimentos, alguns deles matemáticos. Se a mistura cultural privou os escravos de sua identidade, por outro lado, foi a semente para a criação de novas culturas que têm como base a religiosidade inspirada pelos mitos africanos.

Esses discursos estão presentes no interior de todo pensamento teórico. Nascidos a partir de reflexões sobre o mundo, a existência e as situações de "estar no mundo", os mitos oferecem explicações sobre questões que incomodam os seres humanos. Os cosmogônicos, por exemplo, explicam as origens do Cosmos e os processos de constituição de uma determinada sociedade. As diferentes religiões estão relacionadas a eles e, acreditamos, as diferentes idéias matemáticas também. O antropólogo Eudoro de Sousa (1911-1987), em seu livro *Mitologia*, em 1980, não hesitou em afirmar que "... se enunciem teoremas, onde e quando se contavam mitos, mas nem assim se abala a convicção de que, em todos os tempos, não seja mítica a terra em que se firma e de que se nutrem as mais fundas raízes da racionalidade". Entretanto, marcada pelo pensamento cartesiano, a matemática ocidental está estruturada de forma a contrapor-se ao discurso mítico.

A etnomatemática, por sua vez, propõe um olhar que associa conhecimentos matemáticos e mitos. O filósofo alemão Ernest Cassirer (1874-1945), em seu livro *Filosofia das formas simbólicas*, diz que tanto os mitos quanto a ciência são formas simbólicas de igual valor. Podemos dizer o mesmo para a matemática. Ela, os mitos e a religiosidade podem ser encontrados a partir de uma mesma raiz e, em alguns momentos, em formas de expressão

A PROBABILIDADE NO JOGO DE BÚZIOS



O ESQUEMA MOSTRA que numa primeira jogada cada um dos 16 búzios pode estar aberto *(A)* ou fechado *(F)*, tendo, então, um primeiro leque de possibilidades (cujas probabilidades são dadas no quadro abaixo). Esse leque, geralmente, é combinado com outro, por meio de uma segunda jogada dos búzios, onde nem todos serão usados. Em conjunto, os dois jogos criarão várias possibilidades de configurações.

Alguns estudos matemáticos podem ser realizados a partir do jogo de búzios, como o cálculo das probabilidades das configurações possíveis. Por exemplo, tomados 16 búzios, uma das configurações possíveis é a de que todos os búzios estejam abertos, não ocorrendo nenhum fechado; outra, é que tenhamos apenas um búzio fechado. E assim por diante, até que todos os 16 búzios estejam fechados. Se denotarmos por X o número de búzios fechados, temos que X pode assumir os valores de zero até 16, isto é, $X = \{0,1,2,3,...,16\}$ Dessa forma, para determinarmos a probabilidade de acontecer cada uma dessas configurações, devemos observar que ao lançar os búzios não se leva em consideração a ordem em que eles aparecem, e, como são lançados todos juntos, eles se tornam independentes entre si. Assim, para calcular a probabilidade de sair exatamente um búzio fechado, devemos adicionar as probabilidades de todas as possíveis disposições desta configuração e multiplicar as probabilidades dos resultados em cada uma das disposições, isto é,

$$\begin{aligned}P(X=1) &= P(FAA...A) + P(AFA...A) + P(AAF...A) + ... + P(AAA...F)\\ &= [P(F)P(A)P(A)...P(A)] + [P(F)P(A)P(A)...P(A)] + ... + [P(A)P(A)P(A)...P(F)]\\ &= [qpp...p] + [pqp...p] + ... + [ppp...q]\\ &= 16qp^{15}\end{aligned}$$

Assim,
$P(X=0)= p^{16}$, $P(X=1)= 16qp^{15}$,...,$P(X=r)= C_{16,r}\, q^r p^{16-r}$,..., $P(X=15)= 16q^{15}p^1$, $P(X=16)= q^{16}$, onde $C_{16,r}$ é o número de combinações de 16 elementos tomado r a r. Em valores numéricos, cada búzio tem probabilidade $p=1/2$ de estar aberto e $q=(1-p)=1/2$ de estar fechado.

$P(X=0)= (1/2)^{16} = 0{,}000015$
$P(X=1)= 16(1/2)^{16} = 0{,}000244$
$P(X=2)= 120(1/2)^{16} = 0{,}001831$
$P(X=3)= 560(1/2)^{16} = 0{,}008545$
$P(X=4)= 1820(1/2)^{16} = 0{,}027770$
$P(X=5)= 4368(1/2)^{16} = 0{,}066650$
$P(X=6)= 8008(1/2)^{16} = 0{,}122192$
$P(X=7)= 11440(1/2)^{16} = 0{,}174560$
$P(X=8)= 12870(1/2)^{16} = 0{,}196380$
$P(X=9)= 11440(1/2)^{16} = 0{,}174560$
$P(X=10)= 8008(1/2)^{16} = 0{,}122192$
$P(X=11)= 4368(1/2)^{16} = 0{,}066650$
$P(X=12)= 1820(1/2)^{16} = 0{,}027770$
$P(X=13)= 560(1/2)^{16} = 0{,}008545$
$P(X=14)= 120(1/2)^{16} = 0{,}001831$
$P(X=15)= 16(1/2)^{16} = 0{,}000244$
$P(X=16)= (1/2)^{16} = 0{,}000015$

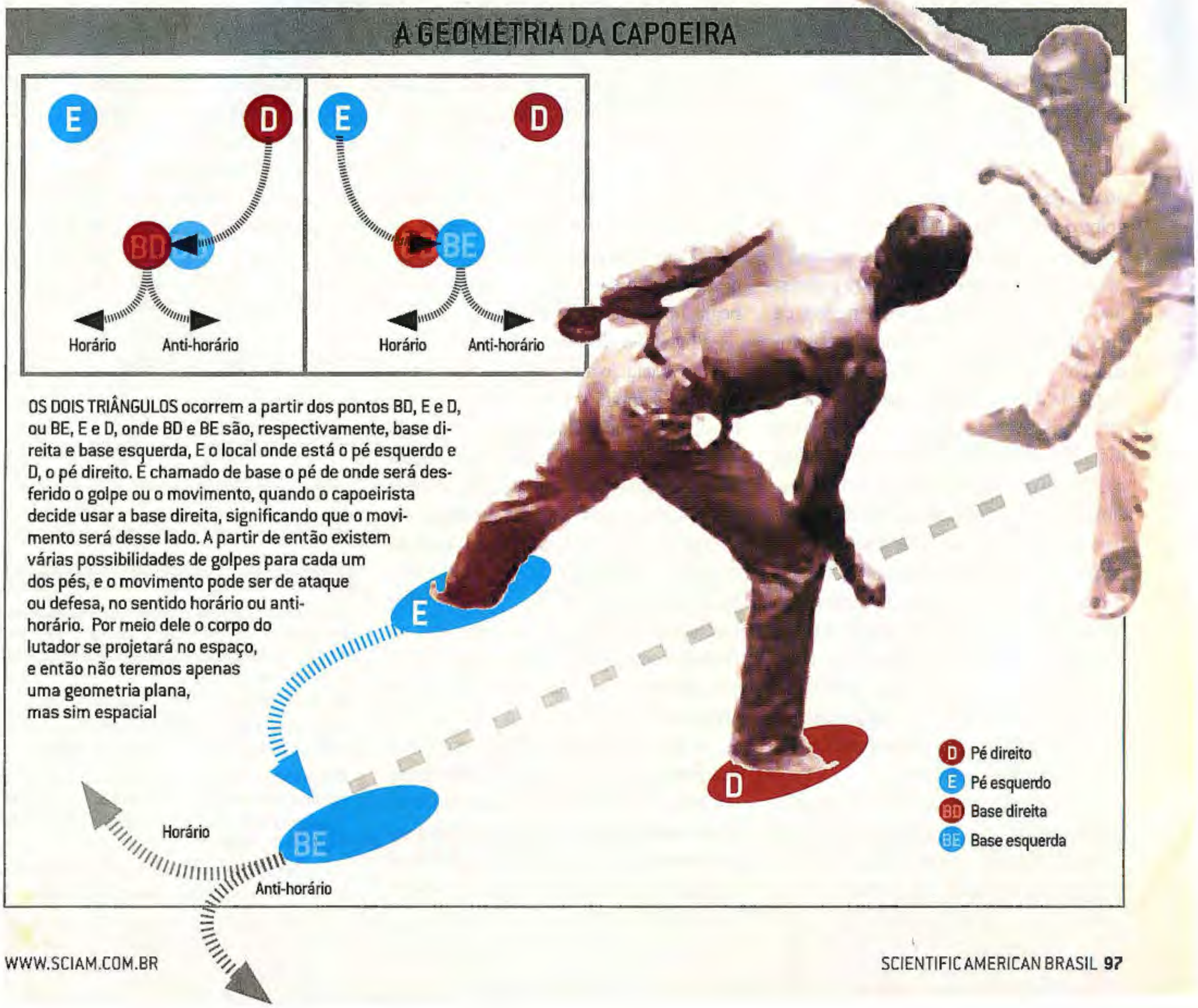
Os cálculos mostram, por exemplo, que a probabilidade de ter todos os búzios abertos ou todos os búzios fechados é muito pequena, isso ocorreria aproximadamente 15 vezes 1 em 1 milhão de jogadas, enquanto a probabilidade de que tenhamos 8 búzios fechados e 8 abertos é de 2 vezes em 10 jogadas que as integram. Esse fato foi apontado por Cunha Júnior em seu texto *Africanidades, afrodescendências e educação*, de 2001. Ele afirma que no pensamento africano idéias matemáticas são representadas nas formas simbólicas da dança e da arte advindas de uma religiosidade com raízes mitológicas.

Por exemplo, o jogo de búzios é um instrumento importante das religiões negras. Ele é composto basicamente por 16 ou 21 búzios, identificados com as principais divindades mais representativas no Brasil. O conjunto das diferentes configurações possíveis pelo lançamento dos búzios é parte central da resposta das entidades à questão colocada e segue um modelo probabilístico para variáveis aleatórias discretas chamado distribuição binomial. Isso significa que no jogo se considera a hipótese de que cada búzio admite apenas dois resultados (abertura para baixo ou para cima) e que eles são independentes em cada búzio. Combinando as várias repetições do jogo tem-se, então, um leque de possibilidades de alternativas possíveis *(ver quadro na pág. ao lado)*. Por meio do esquema se percebe que o jogo possui muitas possibilidades matemáticas de leitura. Também estão presentes um componente mítico e outro pessoal e circunstancial, que se refere à interpretação face à situação vivida. Esses componentes elevam as possibilidades de leitura da resposta e revelam a riqueza e complexidade da emomatemática do negro.

Outra expressão importante das "africanidades brasileiras" é a capoeira. O corpo dos escravos encerrava em si toda a herança trazida da África. Afinal a diáspora para as Américas teve como elemento de expressão e resistência cultural o corpo usado por meio de expressão de formas simbólicas tais como a dança, a música, a religiosidade, ou mesmo a luta, reelaboradas em território brasileiro.

A capoeira de Angola, assim como suas variações, são lutas, instrumentos de defesa e ataque, constituídos por um intrincado jogo de pernas, braços e movimentos do corpo, limitados por um círculo no chão chamado de roda-viva, com projeções no espaço. Nela se observa a ação dos corpos em uma projeção constante em um espaço tridimensional desenhando figuras geométricas que se transformam numa seqüência rápida à medida que os braços e pernas dos combatentes constroem uma geometria dinâmica.

A GEOMETRIA DA CAPOEIRA



OS DOIS TRIÂNGULOS ocorrem a partir dos pontos BD, E e D, ou BE, E e D, onde BD e BE são, respectivamente, base direita e base esquerda, E o local onde está o pé esquerdo e D, o pé direito. É chamado de base o pé de onde será desferido o golpe ou o movimento, quando o capoeirista decide usar a base direita, significando que o movimento será desse lado. A partir de então existem várias possibilidades de golpes para cada um dos pés, e o movimento pode ser de ataque ou defesa, no sentido horário ou anti-horário. Por meio dele o corpo do lutador se projetará no espaço, e então não teremos apenas uma geometria plana, mas sim espacial

NEGOCIAÇÃO DO ESPAÇO

UM DOS OBJETIVOS do capoeira é ocupar o campo do adversário no círculo que, do chão, se projeta para cima como um cilindro imaginário. A ginga é uma negociação dessa área e constitui uma geometria dinâmica de reconstrução permanente do espaço

Isso ocorre na tentativa de confundir a mente do adversário com a ocupação de todos os espaços, na busca de um ponto frágil na guarda do outro para, assim, poder aplicar o golpe certeiro e desequilibrador.

Todo esse processo foi reelaborado pelos negros escravizados de modo que a capoeira não fosse reconhecida pelos senhores de engenho como um instrumento de resistência. Foi disfarçada de dança, ganhou uma cadência chamada ginga que, em síntese, são movimentos de pernas que formam um triângulo imaginário no chão *(ver esquema na pág. 97)*, a partir do qual se criam várias possibilidades para cada uma das duas posições base (direita e esquerda), de onde todos os golpes são planejados e executados. Impôs-se, dessa forma, não apenas uma negociação do espaço, mas também do tempo. Sob o som do berimbau o corpo se enreda num tempo e espaço que une o novo e o antigo, o sagrado e o profano, num inextricável relacionamento com o conhecimento etnomatemático que vibra e canta no corpo negro.

A etnomatemática negra também pode ser encontrada em outras expressões culturais de matriz africana, em outros espaços socioculturais das periferias das grandes cidades brasileiras. Durante bastante tempo muitos brasileiros acreditaram que os quilombos haviam sido extintos a partir da abolição da escravatura, mas a partir de 1985 um cadastramento feito pelo Incra revelou sua existência. Até 2000 tinham sido identificadas 743 comunidades remanescentes quilombolas espalhadas no território brasileiro, com uma população estimada em 2 milhões de pessoas.

Essas comunidades, assim como os agrupamentos urbanos onde as populações negras estão presentes constituem hoje um grande campo de estudos que pode revelar conhecimentos matemáticos próprios e interessantes. A valorização dessa etnomatemática, a importância de realizar pesquisas que revelem os conhecimentos gerados ou mantidos nessas comunidades não é apenas, ou principalmente, tarefa da comunidade negra, mas de todo brasileiro.

Em seu livro *Espelho índio: a formação da alma brasileira*, o antropólogo e historiador Roberto Gambini ressalta o fato de que nós brasileiros temos continuamente matado nossa alma ancestral, calando os saberes de origem indígena e africana. Ele defende que a miscigenação do povo brasileiro não se deu no nível psicológico, mas apenas na dimensão biológica e de modo periférico na dimensão cultural. Sendo assim, revelar e valorizar as africanidades brasileiras, os conhecimentos quilombolas –, dentre eles os etnomatemáticos – é uma forma de manter viva a alma brasileira.

A forma matemática de raciocinar desenvolvida pelos negros no Brasil pode em muito contribuir para a construção de identidades matemáticas próprias. A integração entre mitos, religiosidade e corpo no pensamento de origem africana mostra formas próprias de matematizar, bem como maneiras particulares de se relacionar com o tempo e o espaço. Entender a maneira como essas relações se constroem pode ser o grande desafio que nos levará a reconhecer e valorizar a matemática relacionada às africanidades brasileiras. Esse poderá ser o caminho a ser desenvolvido para que, no que se refere ao ensino de matemática, não perpetuemos o erro ocorrido a partir da reforma educacional de 1962, que por seu caráter universalizante abriu as portas da escola pública aos negros e descendentes dos escravizados, sem criar condições necessárias para que essas crianças não fossem marginalizadas. Na reforma, não houve reconhecimento e respeito às particularidades dos modos de ser e de saber do povo negro, reproduzindo assim erros semelhantes aos ocorridos na abolição da escravatura, quando não foram possibilitadas a sobrevivência e integração social para os ex-escravizados. É nesse sentido que acreditamos na valorização da etnomatemática negra como possibilidade para a melhoria da educação da população brasileira, não só pelo seu compromisso para com a seriedade e o rigor, mas, principalmente, pelo respeito aos diferentes na construção de seus saberes e visão do mundo. SA

Wanderleya Nara Gonçalves Costa *é professora da Universidade Federal de Mato Grosso.* ***Vanisio Luiz da Silva*** *é professor da Rede Municipal de Ensino de São Paulo. Ambos fazem parte do Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática da Faculdade de Educação da USP.*

PARA CONHECER MAIS

A Etnomatemática e os estudos afrodescendentes. Wanderleya Nara Gonçalves Costa e outros, em *Anais do VIII Ebrapem* – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática UEL-Londrina, 2004.

Espelho índio: a formação da alma brasileira. Roberto Gambini. Axis Mundi/Terceiro Nome, 2000.

Quilombos brasileiros: aprendendo sobre a história e a cultura de comunidades negras. Vêra N. Lopes, em *Revista do Professor*, vol. 20, nº 79 págs. 28-33, 2004.

O mundo de pernas para o ar "A capoeira no Brasil" Letícia Vidor Souza Reis. Publisher Brasil, 2000.